Seminario

La Lógica de la Verdad

Clase 9

12 de Mayo de 2014

Modelos básicos

Definición 2.1: Un *Modelo Básico* M_B es un par ordenado <D, I>, donde D contiene códigos para todas las oraciones de L_{Tr} e I es una función que asigna:

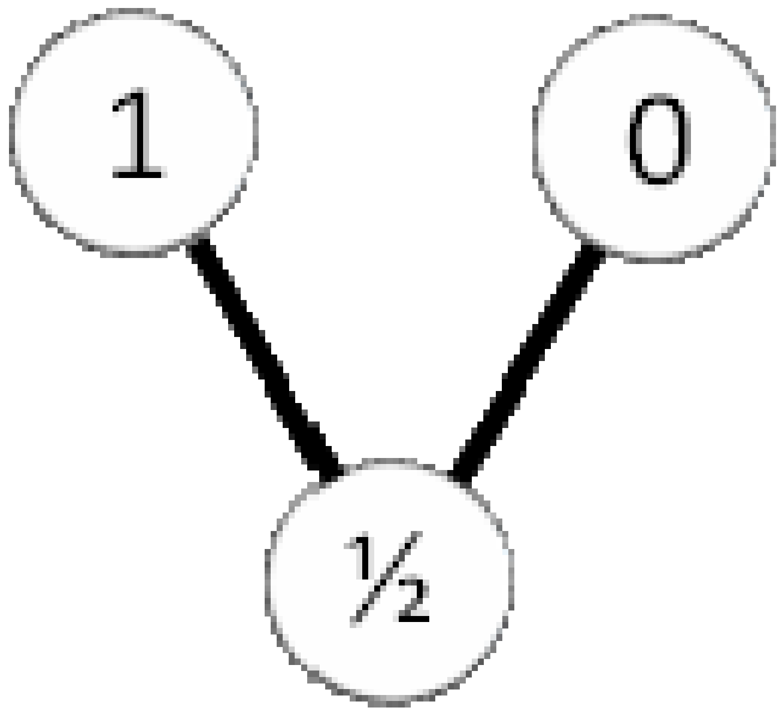
- a cada nombre a_m de L_{Tr} un objeto de D,
- Asumimos que L tiene un nombre *'A'* para cada oración *A*, y que I(*'A'*) = CG(*A*)
- a cada símbolo f_m de función n-ádico de L_{Tr} una función $f_m: D^n \rightarrow D$
- a cada símbolo G_m de predicado n-ádico de L una función g_m: $D^n \rightarrow \{1,0\}$

Las funciones que interpretan los predicados nos muestran su extensión –todas las tuplas a las que les asigna 1– y la antiextensión –todas las tuplas a las que les asigna 0.

Esquemas de valuación

Conjunto de valores de verdad: **K = {1, 0, ½}**

Conjunto ordenado de los valores de verdad: ***K***, representado por el siguiente diagrama



Esquemas de Valuación: SK y WK

$\wedge_\kappa$	**0**	**1**	**½**
0	0	0	0
1	0	1	½
½	0	½	½

$\vee_\kappa$	**0**	**1**	**½**
0	0	1	½
1	1	1	1
½	½	1	½

$\neg_\kappa$	
0	**1**
1	**0**
½	½

$\supset_\kappa$	**0**	**1**	**½**
0	**1**	1	1
1	**0**	1	½
½	½	1	½

$\wedge_\mu$	**0**	**1**	**½**
0	0	0	½
1	0	1	½
½	½	½	½

$\vee_\mu$	**0**	**1**	**½**
0	0	1	½
1	1	1	½
½	½	½	½

$\neg_\mu$	**0**
0	**1**
1	**0**
½	½

$\supset_\mu$	**0**	**1**	**½**
0	**1**	1	½
1	**0**	1	½
½	½	½	½

<u>Definición 2.2</u>: $\Gamma \models_\kappa A$ sii en todo modelo M_κ en que $V_{M\kappa}(\Gamma)=1$, $V_{M\kappa}(A)=1$

Esquemas de Valuación: Supervaluacionismo

Definición 2.3: Un modelo M^+ es una *Precisificación* de un modelo M_σ si y sólo si M^+ es clásico en el sentido de sólo asignar 0 o 1, y para toda oración *A*, $V_{M\sigma}(A) \leq V_{M+}(A)$

De esa manera

$V_{M\sigma}(A) = 1$ sii para toda precisificación M_τ^+ $V_{M+}(A) = 1$

$V_{M\sigma}(A) = 0$ sii para toda precisificación M^+ $V_{M+'}(A) = 0$

$V_M\sigma(A) = ½$ sii para alguna precisificación $M^+{}_m$, $V_{M+m}(A) = 1$ y para alguna precisificación $M^+{}_n$, $V_{M+n}(A) = 0$

Definición 2.4: $\Gamma \models\sigma$ *A* sii en todo modelo M_σ en que $V_{M\sigma}(\Gamma)=1$, $V_{M\sigma}(A)=1$

Propiedades de todos los esquemas de valuación

Definición 2.5: Un esquema es *Normal* cuando arroja valores clásicos si recibe valores clásicos.

Definición 2.6: Un esquema es *Monótono* cuando preserva el orden de los valores:

Si $v1 \leq v2$ y $v3 \leq v4$ entonces $f(v1,v3) \leq f(v2,v4)$

Puntos Fijos: breve repaso

Un elemento ***x*** es el punto fijo de una función ***f*** o de una operación ***OP*** operación si y sólo si la aplicación de esa función u operación a ese elemento da como resultado el mismo elemento, es decir:

$$\boldsymbol{x = f(\mathrm{x})} \qquad \text{ó} \qquad \boldsymbol{x = OP(x)}$$

Ejemplo:

Sea *f* una función de los números reales en los números reales tal que $f(x) = x^2 - 3x + 4$.

Luego, el elemento **2** es un punto fijo de *f*, pues

$f(2) = x^2 - 3x + 4$

$= 2^2 – 3.2 + 4 = 4 – 6 + 4 = -2 + 4$

$f(2) = 2$

Verdad como Punto Fijo del Operador Salto

Definición 2.7: Un *Operador Salto* (κ_M) es una operación que va de interpretaciones posibles de un predicado monádico en un modelo básico M_B a otras interpretaciones posibles. Para cada objeto que asigne una interpretación:

- Si codifica una oración, el operador arroja una interpretación que le asigna el valor de esa oración.

- Si no codifica una oración, arroja 0.

Definición 2.8: $g_n \in X$ es un *Punto Fijo* de una operación κ_M sobre el conjunto X sii $\kappa_M(g_n) = g_n$

Verdad como punto fijo del operador salto

Es importante tener en cuenta que el operador salto toma valuaciones como elementos, es decir, conjuntos de pares ordenados de códigos de oraciones y valores de verdad.

Se trata, entonces, de encontrar una valuación –un conjunto de asignaciones de valores de verdad a (los códigos de) las oraciones de L_{Tr}– que sea apropiado para interpretar correctamente al predicado veritativo, *Tr*.

Ejemplo 2.9:

Lenguaje L_{Tr}: L= {Tr(x), F(x), ‘a’, ‘b’}

Modelo M_B: D= {a,b}, I(‘a’) = a, I(‘b’) = b, I(F(x))= {<a,1>, <b,0> }

Código CG: CG(‘F‘a’’) = a, CG(‘$\neg$*Tr*’b’’) = b,

Posibles interpretaciones de Tr para un esquema clásico τ:

g_1= {<a,1>, <b,1>} g_2 = {<a,0>, <b,1>}

g_3 = {<a,1>, <b,0>} g_4 = {<a,0>, <b,0>}

Operación salto τ_M:

$\tau_M(g_1)$ = {<a,1>, <b,0>} $\tau_M(g_2)$ = {<a,1>, <b,0>}

$\tau_M(g_3)$ = {<a,1>, <b,1>} $\tau_M(g_4)$= {<a,1>, <b,1>}

Puntos fijos trivalentes

Ahora bien, si trabajamos con un esquema de valuación con tres valores, podemos considerar la siguiente interpretación:

$$g_5 = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, \tfrac{1}{2}\rangle\}$$

Y g_5 es un punto fijo de la operación salto $\kappa_{\mathbf{M}}$

$$\kappa_{\mathbf{M}}(g_5) = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, \tfrac{1}{2}\rangle\}$$

Prueba:

hay una interpretación consistente del predicado veritativo de $\mathbf{L_{Tr}}$

Objetivo:

Obtener un conjunto (o colección de conjuntos) de (códigos de) oraciones que den la extensión y la anti-extensión del predicado Tr

Procedimiento:

- Definimos un esquema de de valuación.
- Definimos un operador salto para ese esquema de valuación.
- El punto fijo (los conjuntos de puntos fijos) de dicha operación nos dan lo que buscamos.
-

<u>Definiciones preliminares</u>

Definición 2.10: Un *Conjunto parcialmente Ordenado* es un par ordenado $<X, \leq>$, donde X es un conjunto no vacío y ≤ es una relación Reflexiva, Anti-simétrica y Transitiva.

Definición 2.11: Una *Cadena* es un subconjunto totalmente ordenado incluido en un conjunto parcialmente ordenado.

Para un subconjunto Y de un conjunto X parcialmente ordenado

Definición 2.12: Una *Cota superior* es un elemento de X mayor o igual a todos los de Y.

Definición 2.13: Una *Cota Inferior* es un elemento de X menor o igual a todos los de Y.

Definición 2.14: El *Supremo* es la cota inferior del conjunto de las cotas superiores de Y. Se escribe □Y.

Definición 2.15: El *Ínfimo* es la cota superior del conjunto de las cotas inferiores de Y. Se escribe ∧Y.

Definición 2.16: El *Máximo* es la cota superior única.

Definición 2.17: El *Mínimo* es la cota inferior única.

Definición 2.18: El *Maximal* es un elemento que no tiene ninguno mayor a él.

Definiciones preliminares

Si Y es un subconjunto de un conjunto X parcialmente ordenado, entonces:

Definición 2.19: Y es *Consistente* en X sii todos sus subconjuntos tienen cota superior en X.

Definición 2.20: X es un *Orden parcial coherente completo (opcc)* sii todos sus subconjuntos consistentes tienen supremo.

- Sea **ι(T)**, el conjunto de las posibles interpretaciones de Tr,
- El orden de **ι(T)** dependerá directamente del de *K*:

- $g_n \leq g_m$ si y sólo si g_n asigna valores menores o iguales que los que asigna g_m, para todos los objetos.

Estrategia general de la prueba

(*id est*, qué vamos a hacer en la segunda parte de la clase)

PASO 1: ι(T) es un opcc.

Para encontrar cuál de los miembros de ι(T) nos ofrece la extensión adecuada del predicado Tr, tenemos que determinar si alguno de ellos es punto fijo del operador salto. El resultado anterior nos permite probar exactamente eso.

PASO 2: El operador salto κ_M tiene puntos fijos.

Para probar ese resultado, es preciso mostrar que el operador salto es monótono. De hecho, κ_M tiene más de un punto fijo. Esto nos conduce al tercer opcc.

PASO 3: Los puntos fijos de κ_M forman un opcc.

Lo interesante de ello es que esos puntos fijos no son todos iguales. Introduciremos una clasificación de distintos tipos y probaremos su existencia.

PASO 4: κ_M tiene puntos fijos mínimo, maximales e intrínsecos.

Explicación conceptual de la prueba

- Buscamos una interpretación (una asignación de valores de verdad a las oraciones de L_{Tr}) que sea la correcta, es decir, *que no deba ser corregida*.

- Como el operador de “corrección” es el operador salto, encontraremos dicha(s) interpretación(es) si es que encontramos una interpretación que sea un *punto fijo del operador salto*.

- En otras palabras, una interpretación que, al ser “corregida”, no cambie en absoluto.

- Intentaremos probar que esta interpretación es un elemento del conjunto de todas las interpretaciones posibles para las oraciones de L_{Tr}.

<u>Estrategia general de la prueba (*reloaded*)</u>

PASO 1: ι(T) es un opcc.

Para encontrar cuál de los miembros de ι(T) nos ofrece la extensión adecuada del predicado Tr, tenemos que determinar si alguno de ellos es punto fijo del operador salto. El resultado anterior nos permite probar exactamente eso.

PASO 2: El operador salto κ_M tiene puntos fijos.

Para probar ese resultado, es preciso mostrar que el operador salto es monótono. De hecho, κ_M tiene más de un punto fijo. Esto nos conduce al tercer opcc.

PASO 3: Los puntos fijos de κ_M forman un opcc.

Lo interesante de ello es que esos puntos fijos no son todos iguales. Introduciremos una clasificación de distintos tipos y probaremos su existencia.

PASO 4: κ_M tiene puntos fijos mínimo, maximales e intrínsecos.

PASO 2: El operador salto κ_M tiene puntos fijos

Teorema 2.23: κ_M es monótono: Si $g_n \leq g_m$, entonces $\kappa_M(g_n) \leq \kappa_M(g_m)$

Definición 2.26: g_n es un *Punto correcto* sii $g_n \leq \kappa_M(g_n)$

Definición 2.27: g_n es un *Punto repleto* sii $\kappa_M(g_n) \leq g_n$

Teorema 2.28: Para todo punto correcto de κ_M en $\iota(T)$, hay [al menos] un punto fijo mayor a él.

Lema: El conjunto vacío es un punto correcto

PASO 2: El operador salto κ_M tiene puntos fijos

Teorema 2.28: Para todo punto correcto de κ_M en $\iota(T)$, hay [al menos] un punto fijo mayor a él.

Prueba (esquema): Considérese un subconjunto consistente de las interpretaciones mayores a un punto correcto (i.e. una interpretación correcta).

Por ser consistente, tiene al menos un maximal g_p en $\iota(T)$.

Luego, aplicar el operador salto a g_p da un elemento (una interpretación) mayor o igual a g_p, *porque* g_p *es un maximal.*

Entonces, g_p es un punto fijo del operador salto.

Por tanto, *existe al menos un punto fijo de* κ_M*, es decir, una interpretación adecuada de* Tr.

PASO 3: Los puntos fijos de κ_M forman un opcc

La prueba anterior nos garantiza la existencia de un punto fijo bajo la suposición de que hay algún punto correcto. Sin embargo, dado que el conjunto vacío es trivialmente un punto de ese tipo, hemos de hecho probado la existencia efectiva de al menos un punto fijo. Tendremos más de uno, y no todos poseen las mismas características. La idea será entonces clasificarlos y probar la existencia de cada uno de ellos en particular.

Conjunto de puntos fijos: Sea $P(\iota(T))$ el conjunto de los puntos fijos de κ_M en $\iota(T)$

Estructura ordenada de puntos fijos: Sea *P* la estructura formada ordenando $P(\iota(T))$

Teorema 2.29: *P* es un opcc (Teorema de punto fijo de Visser)

PASO 3: Los puntos fijos de κ_M forman un opcc

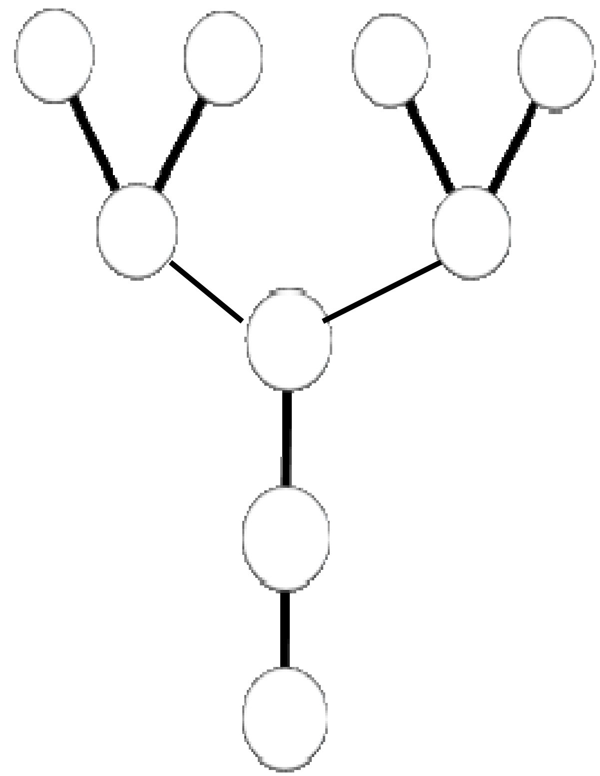
Teorema 2.29: *P* es un opcc (Teorema de punto fijo de Visser)

¿Cómo luce *P*?

PUNTOS FIJOS MAXIMALES

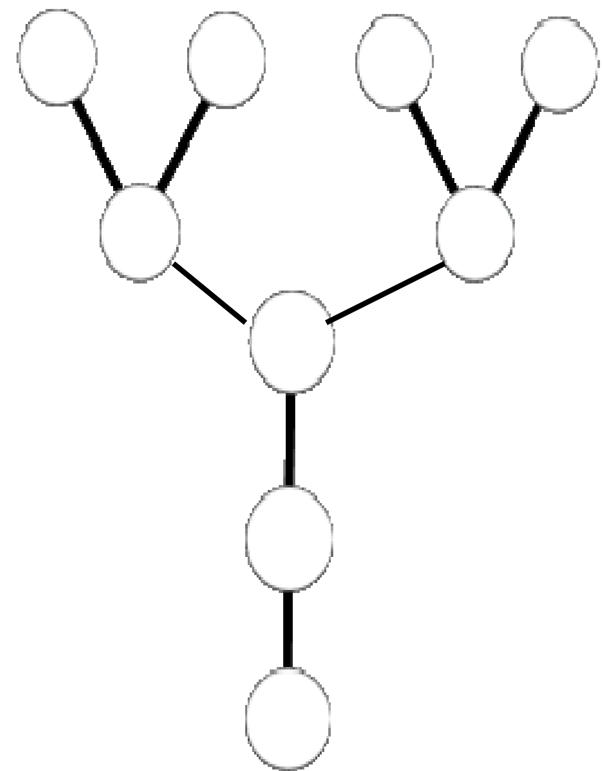
PUNTO FIJO INTRÍNSECO MÁXIMO

PUNTO FIJO MÍNIMO



PASO 3: Los puntos fijos de κ_M forman un opcc

¿Qué son cada uno de los puntos fijos en el orden de *P*?



PUNTOS FIJOS MAXIMALES:

Cotas superiores de subconjuntos de *P*

PUNTO FIJO INTRÍNSECO MÁXIMO:

it's complex…

PUNTO FIJO MÍNIMO:

el supremo en *P* de la interpretación vacía

¿Qué diferencia hay entre los distintos puntos fijos?

Las diferencias se derivan de la definición del orden entre dos interpretaciones de *Tr*: **$g_n \leq g_m$ si y sólo si g_n asigna valores menores o iguales que los que asigna g_m, para todos los objetos.**

PUNTO FIJO MÍNIMO: será un punto fijo del operador salto (i.e. de la operación de "corrección"), pero el que asignará valores menores a otras interpretaciones.

PUNTO FIJO INTRÍNSECO MÁXIMO: será un punto fijo del operador salto (i.e. de la operación de "corrección"), pero el que asignará los máximos valores no divergentes con otras interpretaciones que la sucedan.

PUNTOS FIJOS MAXIMALES: serán distintos puntos fijos del operador salto (i.e. de la operación de "corrección"), que asignen a las oraciones valores mayores a ½, pero incomparables en relación a *K*.

¿Qué diferencia hay entre los distintos puntos fijos?

PUNTO FIJO MÍNIMO: será un punto fijo del operador salto (i.e. de la operación de "corrección"), pero el que asignará valores menores a otras interpretaciones que también son puntos fijos y que son consistentes.

Ejemplo: Consideremos solamente a la oración del Mentiroso y a la del Honesto. En el punto fijo mínimo todas las atribuciones de verdad a oraciones del lenguaje de base estarán ya "corregidas". Pero el Mentiroso y el Honesto no son de este tipo. Como partimos de la interpretación vacía, en el punto fijo mínimo ambas recibirán ½.

¿Qué diferencia hay entre los distintos puntos fijos?

PUNTOS FIJOS MAXIMALES CONSISTENTES: serán distintos puntos fijos del operador salto (i.e. de la operación de “corrección”), que asignen a las oraciones valores mayores a ½, pero incomparables en relación a *K*.

Ejemplo: Consideremos la oración del Honesto. En algunos puntos fijos maximales ella es verdadera, y esa interpretación de *Tr* es consistente (i.e. no lleva a contradicciones). En otras, es falsa, y esa interpretación de *Tr* es consistente (i.e. no lleva a contradicciones). Pero “1” y “0” son incomparables en *K*. Luego, hay al menos dos puntos fijos maximales.

<u>¿Qué diferencia hay entre los distintos puntos fijos?</u>

PUNTO FIJO INTRÍNSECO MÁXIMO: será un punto fijo del operador salto (i.e. de la operación de "corrección"), pero el que asignará los máximos valores no divergentes con otras interpretaciones que la sucedan.

<u>Ejemplo:</u> Consideremos solamente la siguiente oración:

Tr('e') v ¬*Tr*('e') cuyo nombre es 'e'

y cuyo código se describe del siguiente modo

CG('*Tr*('e') v ¬*Tr*('e')') = e

En el punto fijo intrínseco máximo está oración será verdadera. La razón: todos los puntos fijos sucesivos (i.e. los maximales) la hacen verdadera. (Prueba: intentar pensar una interpretación que la haga *falsa*)