Metateorema de la Deducción

El Metateorema de la Deducción

Si $\Gamma \cup \{A\} \vdash B \Rightarrow \Gamma \vdash (A \rightarrow B)$.

Paso base

Si la derivación de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$ consiste de un único paso, éste está constituido por B. Entonces B debe ser, o bien un axioma de SP, o bien un miembro de Γ, o bien A. Consideremos cada uno de estos tres casos:

Caso 1. B es un axioma de *SP*

La siguiente es una derivación de $(A \to B)$ a partir de Γ:

Caso 1. B es un axioma de SP

La siguiente es una derivación de $(A \to B)$ a partir de Γ:

1. B Axioma de SP, por hipótesis

Caso 1. B es un axioma de SP

La siguiente es una derivación de $(A \rightarrow B)$ a partir de Γ:

1. B — Axioma de SP, por hipótesis
2. $(B \rightarrow (A \rightarrow B))$ — Axioma, por SP_1

Caso 1. B es un axioma de *SP*

La siguiente es una derivación de $(A \rightarrow B)$ a partir de Γ:

1. B — Axioma de *SP*, por hipótesis
2. $(B \rightarrow (A \rightarrow B))$ — Axioma, por SP_1
3. $(A \rightarrow B)$ — *MP* 1, 2

Caso 2. $B \in \Gamma$

La siguiente es una derivación de $(A \to B)$ a partir de Γ:

Caso 2. $B \in \Gamma$

La siguiente es una derivación de $(A \to B)$ a partir de Γ:

1. B Miembro de Γ, por hipótesis

Caso 2. $B \in \Gamma$

La siguiente es una derivación de $(A \to B)$ a partir de Γ:

1. B — Miembro de Γ, por hipótesis
2. $(B \to (A \to B))$ — Axioma, por SP_1

Caso 2. $B \in \Gamma$

La siguiente es una derivación de $(A \to B)$ a partir de Γ:

1. B — Miembro de Γ, por hipótesis
2. $(B \to (A \to B))$ — Axioma, por SP_1
3. $(A \to B)$ — MP 1, 2

Caso 3. $A \equiv B$

Por lo tanto, $(A \rightarrow B) \equiv (A \rightarrow A)$. Luego, la siguiente es una derivación de $(A \rightarrow B)$ a partir de Γ:

Caso 3. $A \equiv B$

Por lo tanto, $(A \rightarrow B) \equiv (A \rightarrow A)$. Luego, la siguiente es una derivación de $(A \rightarrow B)$ a partir de Γ:

1. $(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A))$ Axioma, por SP_1

Caso 3. $A \equiv B$

Por lo tanto, $(A \to B) \equiv (A \to A)$. Luego, la siguiente es una derivación de $(A \to B)$ a partir de Γ:

1. $(A \to ((A \to A) \to A))$ Axioma, por SP_1
2. $((A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A)))$ Axioma, por SP_2

Caso 3. $A \equiv B$

Por lo tanto, $(A \to B) \equiv (A \to A)$. Luego, la siguiente es una derivación de $(A \to B)$ a partir de Γ:

1. $(A \to ((A \to A) \to A))$ Axioma, por SP_1
2. $((A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A)))$ Axioma, por SP_2
3. $((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$ MP 1, 2

Caso 3. $A \equiv B$

Por lo tanto, $(A \to B) \equiv (A \to A)$. Luego, la siguiente es una derivación de $(A \to B)$ a partir de Γ:

1. $(A \to ((A \to A) \to A))$ Axioma, por SP_1
2. $((A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A)))$ Axioma, por SP_2
3. $((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$ MP 1, 2
4. $(A \to (A \to A))$ Axioma, por SP_1

Caso 3. $A \equiv B$

Por lo tanto, $(A \to B) \equiv (A \to A)$. Luego, la siguiente es una derivación de $(A \to B)$ a partir de Γ:

1. $(A \to ((A \to A) \to A))$ Axioma, por SP_1
2. $((A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A)))$ Axioma, por SP_2
3. $((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$ MP 1, 2
4. $(A \to (A \to A))$ Axioma, por SP_1
5. $(A \to A)$ MP 3, 4

Paso inductivo

Hipótesis inductiva: Si existe una derivación de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$ en un número de pasos menor a $k \Rightarrow \Gamma \vdash (A \rightarrow B)$.

Tesis inductiva: Si existe una derivación de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$ en un número k de pasos $\Rightarrow \Gamma \vdash (A \rightarrow B)$.

Prueba:

Existen ahora cuatro posibilidades: o bien B es un axioma, o bien un miembro de Γ, o bien es la misma fórmula A, o bien B se obtiene como consecuencia de dos fórmulas anteriores en la derivación, por *MP*. Los tres primeros son idénticos a los del paso base y no hay necesidad de repetirlos aquí.
Consideremos entonces el cuarto caso:

Caso 4. B es una consecuencia por *MP* de dos fórmulas anteriores

Sean C_i y C_j las fórmulas anteriores, donde i y j indican el lugar que ocupan en la derivación de B a partir de $\Gamma \cup A$ y, por ende, $i < k$ y $j < k$. Luego, una de ellas debe tener forma condicional, tal que su antecedente está constituido por la otra y su consecuente por B. Sin perdida de generalidad diremos que:

$$C_i \equiv (C_j \rightarrow B)$$

Entonces, $\Gamma \cup A \vdash (C_j \rightarrow B)$ y $\Gamma \cup A \vdash C_j$. Como $i < k$ y $j < k$, por hipótesis inductiva tenemos que $\Gamma \vdash (A \rightarrow (C_j \rightarrow B))$ y $\Gamma \vdash (A \rightarrow C_j)$.

Caso 4. B es una consecuencia por *MP* de dos fórmulas anteriores

La siguiente es una derivación de $(A \to B)$ a partir de Γ:

Caso 4. B es una consecuencia por *MP* de dos fórmulas anteriores

La siguiente es una derivación de $(A \to B)$ a partir de Γ:

1. $(A \to (C_j \to B))$

Caso 4. B es una consecuencia por *MP* de dos fórmulas anteriores

La siguiente es una derivación de $(A \to B)$ a partir de Γ:

1. $(A \to (C_j \to B))$
2. $(A \to C_j)$

Paso inductivo

Caso 4. B es una consecuencia por *MP* de dos fórmulas anteriores

La siguiente es una derivación de $(A \to B)$ a partir de Γ:

1. $(A \to (C_j \to B))$
2. $(A \to C_j)$
3. $((A \to (C_j \to B)) \to ((A \to C_j) \to (A \to B)))$ Axioma, por SP_2

Caso 4. B es una consecuencia por *MP* de dos fórmulas anteriores

La siguiente es una derivación de $(A \rightarrow B)$ a partir de Γ:

1. $(A \rightarrow (C_j \rightarrow B))$
2. $(A \rightarrow C_j)$
3. $((A \rightarrow (C_j \rightarrow B)) \rightarrow ((A \rightarrow C_j) \rightarrow (A \rightarrow B)))$ Axioma, por SP_2
4. $((A \rightarrow C_j) \rightarrow (A \rightarrow B))$ MP 1, 3

Caso 4. B es una consecuencia por *MP* de dos fórmulas anteriores

La siguiente es una derivación de $(A \rightarrow B)$ a partir de Γ:

1. $(A \rightarrow (C_j \rightarrow B))$
2. $(A \rightarrow C_j)$
3. $((A \rightarrow (C_j \rightarrow B)) \rightarrow ((A \rightarrow C_j) \rightarrow (A \rightarrow B)))$ Axioma, por SP_2
4. $((A \rightarrow C_j) \rightarrow (A \rightarrow B))$ MP 1, 3
5. $(A \rightarrow B)$ MP 2, 4

Luego, por el Principio de Inducción Matemática Completa, tenemos que, para cualquier natural n, si existe una derivación de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$ en n pasos, entonces $(A \rightarrow B)$ es derivable de Γ o, lo que es lo mismo, si $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, entonces $\Gamma \vdash (A \rightarrow B)$. $\square$