Lógica, Metalógica y Metametalógica

L. M. Picollo y P. Teijeiro

Acerca del método en la metateoría

Probaremos aquí algunos resultados para sistemas de lógica proposicional. Esto implica que reflexionaremos *acerca* del sistema y no *dentro* del sistema, como sucede cuando probamos algún teorema usando, por ejemplo, un método de deducción natural. Para hablar acerca de un sistema hay que hacerlo desde afuera. Lo cual significa que haremos algo similar a lo que hacemos cuando razonamos informalmente en el lenguaje natural.

Esto podría presentar el siguiente dilema: o bien las pruebas metateóricas no son rigurosas, con lo cual no se entiende para qué las hacemos, o bien el lenguaje natural es aceptablemente riguroso, con lo cual no se entiende para qué hacemos lógica. Este dilema es irresoluble. Aun cuando decidiéramos hacer las pruebas metateóricas en un nuevo lenguaje lógicamente estructurado, volveríamos a enfrentarnos al dilema cuando nos preguntáramos por las propiedades de ese nuevo lenguaje. Lo mejor que podemos hacer, entonces, es reducir los riesgos del razonamiento informal al mínimo. Al ser el lenguaje natural la herramienta más poderosa que tenemos en cuanto a poder expresivo, es también la más peligrosa. En particular, hay dos cosas que querríamos evitar: la ambigüedad y las inferencias dudosas.

Para evitar la ambigüedad, daremos definiciones cuidadosas de los conceptos, fijando el significado de los términos técnicos. Una previa comprensión clara de estos conceptos es condición de posibilidad de la comprensión de los teoremas que los involucran, con lo cual recomendamos no avanzar sobre las pruebas hasta estar seguros de haber entendido cabalmente esas definiciones y haberlas internalizado.

Para evitar las inferencias dudosas, limitaremos nuestros pasos argumentativos a la aplicación de definiciones y ciertos modos de razonamiento suficientemente transparentes, tales como el razonamiento por absurdo o los que son rescatados por las inferencias *Modus Ponens*, *Modus Tollens*, etc..

Por último, para la comprensión de los teoremas acerca de un sistema de lógica proposicional, resulta útil presentarlos gráficamente, de modo tal que permita, por un lado, diferenciar cada paso de su justificación y, por el otro, poder captar visualmente cada paso en forma directa, sin perderse en explicaciones que oscurecen más que aclarar. Para lo primero, vamos a organizar las demostraciones en dos columnas, tal como suelen presentarse las pruebas de deducción natural. A la derecha encontraremos, entre paréntesis, la justificación de cada paso. Para lo segundo, utilizaremos distintos tipo de abreviaturas:

- Flechas, para expresar condicionales materiales del metalenguaje: $\Rightarrow$.[1]

[1] Es muy importante no confundir este símbolo metalingüístico con '$\rightarrow$', el que expresa los condicionales materiales del lenguaje objeto.

- Letras mayúsculas latinas, para expresar fórmulas del lenguaje proposicional de cualquier complejidad interna.
- Letras mayúsculas griegas, para expresar conjuntos de fórmulas de aquel lenguaje.
- Los martillos semánticos y sintácticos, para expresar las relaciones de consecuencia semántica y sintáctica, respectivamente: '$\models$', '$\vdash$'.
- Algunas expresiones básicas de la teoría de conjuntos, como el símbolo de pertenencia, '$\in$', y la notación usual con llaves para indicar que lo que se encuentra entre ellas forma un conjunto.
- El símbolo de equivalencia, '$\equiv$', para indicar que la expresión que escribimos a la izquierda es la misma que la de la derecha.
- Al final de cada prueba escribiremos un pequeño cuadrado, '$\square$', alineado a la derecha, indicando que se ha alcanzado el resultado pretendido y la demostración ha finalizado.

Por ejemplo, si queremos referirnos al teorema que dice que, si una fórmula se sigue semánticamente de un conjunto de fórmulas, entonces también se sigue de ese conjunto en unión con alguna otra fórmula, en lugar de todo este palabrerío, escribiremos simplemente:

$$\Gamma \models A \Rightarrow \Gamma \cup \{B\} \models A$$

O bien, si queremos establecer que una fórmula es consecuencia semántica del conjunto vacío si y sólo si es lógicamente válida, escribiremos simplemente:

$$\phi \models A \Leftrightarrow \models A$$

Llegados a este punto, es crucial entender que nos enfrentamos con un nuevo peligro. Como veremos, el resultado será que nuestras pruebas van a lucir muy similares a derivaciones hechas dentro de algún sistema de lógica. Estas apariencias no deben confundirnos y tendremos que aprender a distinguir ambos niveles de lenguaje, so pena de no entender nada.

Índice general

1. ¿Qué es la Lógica Proposicional? 1

2. Un lenguaje para la Lógica Proposicional 7

3. Una semántica para *P* 11

4. Un aparato deductivo para la Lógica Proposicional 23

5. Relaciones entre la semántica de *P* y el aparato deductivo *SP* 53

Capítulo 1

¿Qué es la Lógica Proposicional?

El objetivo de un argumento es dar apoyo a la verdad de una afirmación mediante el empleo de otras afirmaciones. Ese apoyo puede tener distintos grados de fuerza y, a su vez, esa fuerza puede medirse de modos muy diversos. La Lógica Proposicional pretende ser una teoría acerca del grado más fuerte y objetivo de apoyo que puede recibir una proposición. Queremos rescatar los argumentos donde la garantía que las premisas ofrecen a la conclusión es absoluta y tal que la verdad de aquellas hace imposible la falsedad de ésta.

Consideremos los siguientes tres ejemplos:

$$\frac{\text{Hume es un filósofo empirista.}}{\text{Existen tanto las medialunas de grasa como las de manteca.}}$$

$$\frac{\text{Los koalas viven en Australia.}}{\text{Los koalas son marsupiales.}}$$

$$\frac{\text{El azul es un color bárbaro y el verde es un color bárbaro.}}{\text{El azul es un color bárbaro.}}$$

El primer caso no presenta dudas. A pesar de ser tanto la premisa como la conclusión enunciados verdaderos, no hay ninguna relación entre ellos. Hace falta algo más que ofrecer verdades para justificar una proposición.

El segundo caso es un poco mejor. Nuevamente, no hay falsedad en él, pero esta vez se agrega además un vínculo entre ambos elementos. El problema aquí es que se trata de un vínculo solamente material, y por ende, demasiado débil para lo que estamos buscando. Es un hecho que los mamíferos australianos son marsupiales. Ahora ¿sería imposible que los koalas vivieran en Australia y no fueran marsupiales? Quizás sí, desde un punto geológico o biológico, pero hay al menos algún sentido en que podemos concebir que todo eso podría haber sido de otra manera.

El tercer caso, a primera vista puede parecer peor que el anterior, puesto que la premisa es altamente cuestionable. Sin embargo, si admitiéramos su verdad, parece que no tenemos la libertad de rechazar la conclusión. Lo cual quiere decir que, supuesta la verdad de las premisas, la verdad de la conclusión se hace necesaria o, lo que es lo mismo, se hace imposible su falsedad. Hemos identificado entonces el caso que nos interesa y vamos a denominar a la relación que existe entre ambas proposiciones "relación de consecuencia lógica".

Sin embargo, la caracterización que dimos hasta el momento de la noción de consecuencia no parece satisfactoria, puesto que los conceptos de *necesidad* y *posibilidad* no resultan suficientemente claros. ¿A qué sentido de imposibilidad nos estamos refiriendo? ¿Qué significa que algo sea necesario? Será preciso entonces avanzar un poco más lejos y abandonar la noción preteórica con la que contamos hasta ahora.

¿De qué depende entonces que exista esa relación tan estrecha en el tercer ejemplo? Evidentemente, no del contenido de las proposiciones involucradas, ya que, en primer lugar, mostramos en el ejemplo anterior que ello resulta más débil que lo que buscamos y, en segundo lugar, es de esperarse que el valor veritativo varíe de persona a persona (verdadero para algunos y falso para otros). Por ende, si no se trata del contenido, deberá tratarse de la forma. El problema es entonces dar con un análisis satisfactorio de la forma del razonamiento.

Una posibilidad es la siguiente:

$$\frac{A \text{ y } B}{A}$$

Hemos quitado todo el contenido proposicional. Obtuvimos en la premisa, aquella afirmación que se supone aporta evidencia suficiente para la conclusión, dos letras esquemáticas coordinadas por un nexo. El nexo no es parte del contenido. ¿Cuál es su función entonces? Comparemos:

- El azul es un color bárbaro y el verde es un color bárbaro.
- El azul es un color bárbaro o el verde es un color bárbaro.

La diferencia es que en la primera oración se afirma la verdad de ambas proposiciones, mientras que en la segunda se afirma la verdad de al menos una de ellas. Y, en consecuencia, la primera constituye evidencia para la afirmación de que el azul es un color bárbaro, mientras que la segunda no. Por ende, esta clase de nexos no sólo tienen la función de permitirnos construir enunciados más complejos a partir de otros más simples sino que además operan de distintas maneras con los valores de verdad de aquello que componen. Llamaremos a estos nexos "*conectivas veritativo-funcionales*".

El análisis en términos de símbolos para conectivas veritativo funcionales y proposiciones que no las contengan, que llamaremos "simples", ha resultado exitoso. En la premisa teníamos una proposición compleja, que afirmaba la verdad de dos proposiciones simples que la componían. En la conclusión, teníamos una de esas proposiciones simples. Sostener la premisa y rechazar la conclusión nos hubiera acarreado una inconsistencia. Y, como vimos, esto es independiente de que consideremos verdadera o falsa a la premisa.

La Lógica Proposicional será una sistematización de este tipo de análisis. Tendremos símbolos para representar proposiciones simples arbitrarias y símbolos para representar a las conectivas. De la semántica del lenguaje natural sólo conservaremos aquello que, según el análisis, resultó necesario para descubrir las relaciones inferenciales: la posibilidad de que cada proposición sea verdadera o falsa y el modo en que las conectivas operan con los valores de verdad de los elementos que componen, para determinar el valor de verdad de la proposición resultante. Para lograrlo, nos valdremos de la noción matemática de función. En particular, las funciones que nos interesen serán las que pertenezcan a la familia de las *valuaciones*, que definiremos oportunamente.

El mecanismo que presentamos nos será además útil para analizar un caso límite de la idea de garantía absoluta que mencionamos al principio. Algunas proposiciones, una vez analizadas, revelarán una estructura tal que no resulte falsa bajo ninguna valuación. Es el caso, por ejemplo, de la siguiente:

- A o no A

Cualquier instancia de ese esquema, esto es, cualquier reemplazo de la letra A por una proposición, es verdadera. Por ende, estos enunciados no necesitarán de ningún apoyo o evidencia para ser aceptados; podemos inferirlos sin premisa alguna. Una teoría de la consecuencia lógica estará también interesada por casos de este tipo. En general, esas proposiciones se denominan "verdades lógicas". En el marco de la lógica proposicional, las llamaremos "proposiciones tautológicas" o, simplemente, "tautologías".

Llegados a este punto, es preciso aclarar que este análisis no es el único posible y, ni siquiera, el más abarcativo. Muchos razonamientos que querríamos rescatar como válidos (y muchas oraciones que querríamos rescatar como lógicamente verdaderas) no son declaradas tales por la Lógica Proposicional. Por ejemplo:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{2 es un número primo.}\\ \text{Los números primos sólo son divisibles por 1 y por sí mismos.}\end{array}}{\text{2 sólo es divisible por 1 y por sí mismo.}}$$

Para capturarlos, deberíamos incursionar en el análisis interno de las proposiciones, como se lleva a cabo en las lógicas de predicados, siendo la de primer orden una de ellas. Sin embargo, el objetivo de este cuadernillo no es la aplicación de los sistemas lógicos para el análisis de razonamientos u oraciones del lenguaje natural sino el estudio de propiedades de los sistemas mismos. En este sentido, la Lógica Proposicional tiene la ventaja de que las pruebas metateóricas que se realizan en ella resultan mucho más sencillas. Y, adicionalmente, sus propiedades son prácticamente las mismas que las de la Lógica de Predicados de primer orden. De todos los resultados que probemos aquí, sólo la decidibilidad no podrá extenderse a ella.

No obstante, más allá de las distintas ampliaciones que puedan hacerse para capturar algunos de los razonamientos que exceden el análisis de la Lógica Proposicional, resta un problema filosófico que surge del modo en que opera esta familia de teorías. Partiendo de una noción preteórica de consecuencia lógica, que resultaba demasiado vaga u oscura, como mostramos mediante los ejemplos de razonamientos unas líneas más arriba,ofrecen una *elucidación* de ella en términos precisos y formales. La elucidación conceptual es una de las actividades a que puede abocarse un filósofo (y según algunos autores, como Wittgenstein, la única).[1] La cuestión radica, entonces, en la relación que se establece entre el concepto original y el concepto teórico. Una posibilidad, de la que fue abanderado W.V. O. Quine [7] y [8], es que la elucidación debe preservar el uso y la utilidad, pero no se requiere que haya sinonimia, ni que se rescate el significado esencial, ni nada por el estilo. Y, aún

[1] Véase Wittgenstein [10], [11] y [12].

más, el nuevo concepto viene a reemplazar y eliminar al anterior. Otra posibilidad, defendida por Tarski [9], exige que en primera instancia se identifique el objeto de estudio, en segundo lugar se determinen ciertas condiciones que debería cumplir cualquier elucidación de ese concepto y, por último, se proceda a la elucidación propiamente dicha.[2]

Al usar la Lógica Proposicional como teoría acerca de la consecuencia lógica entre enunciados, lo que estamos haciendo es reemplazar un concepto modal ("es imposible que la conclusión sea falsa si las premisas son verdaderas"; la *posibilidad* y la *necesidad* son modalidades) por otro general ("toda valuación que hace verdaderas a las premisas hace verdadera a la conclusión"). Para un quineano, dado que la nueva noción es clara y permite explicar la validez de ciertos razonamientos, el discurso modal puede ser dejado de lado, sin dar lugar a problemas sobre si el nuevo concepto es una clarificación adecuada del original al no ser modal como éste.

Pero, si uno cree que el concepto teórico debe preservar el significado preteórico, entonces puede tener ciertos pruritos con respecto a las bondades de cualquier análisis de una noción intensional, como es aquel concepto preteórico de consecuencia lógica, que incluye modalidades, en términos puramente extensionales, como la noción teórica de consecuencia lógica dada por la Lógica Proposicional, que cuantifica sobre valuaciones. Aquí trabajaremos con una perspectiva pragmática del asunto, dejando de lado todo tipo de pruritos.

[2] Para una exposición detallada de estos temas, véase también Moro Simpson [6] y Coffa [2].

Capítulo 2

Un lenguaje para la Lógica Proposicional

En esta sección definiremos un lenguaje para la Lógica Proposicional, que llamaremos '*P*'. Todo lenguaje formal está dado por un vocabulario y una sintaxis.

El vocabulario es un conjunto de símbolos, a partir de los cuales se forman las expresiones del lenguaje. Ciertas combinaciones de estos símbolos serán permitidas y darán lugar a fórmulas bien formadas (o, simplemente, fórmulas), y otras serán rechazadas. El vocabulario del lenguaje para la Lógica Proposicional, *P*, está dado por el conjunto:

$V_P = \{p, \quad ', \neg, \to, (,)\}$

Llamaremos '*coma*' al símbolo ''', '*negación*' a '$\neg$', '*condicional material*' a '$\to$' y '*paréntesis derecho e izquierdo*' a '(' y ')', respectivamente. Diremos que '$\neg$' y '$\to$' son *conectivas lógicas.*

La sintaxis es la encargada de establecer qué combinaciones de símbolos de V_P debemos aceptar como fórmulas bien formadas del lenguaje y cuáles no. En el caso de *P*, no lo haremos especificando una propiedad que todas las combinaciones de símbolos deseadas verifiquen, sino que procederemos del siguiente modo:

1. Indicaremos primero algunas combinaciones básicas que consideramos fórmulas del lenguaje, mediante lo que se denomina '*cláusula básica*'.

2. Luego, ofreceremos una serie de reglas que nos indiquen cómo generar otras fórmulas bien formadas a partir de ellas. Estas reglas serán las *cláusulas in-*

ductivas.

3. Finalmente, agregaremos una *cláusula de cierre*, que indique que sólo son fórmulas bien formadas aquellas que puedan construirse mediante este método, de modo tal que ninguna otra expresión sea llamada 'fórmula de *P*'.

Este tipo de definición se suele denominarse '*definición recursiva*'. Antes de sumergirnos directamente en la definición recursiva de Fórmula de *P*, presentaremos un ejemplo que suponemos esclarecedor para este tipo de definiciones. Podemos definir los números naturales mediante una definición explícita como aquellos números que son enteros y positivos a la vez. O bien podemos definirlos recursivamente estipulando que:

1. 1 es un número natural (cláusula básica).
2. Si algo es un número natural entonces el resultado de sumarle 1 es también un número natural (cláusula inductiva).
3. Sólo los números que obtengamos de este modo serán números naturales (cláusula de cierre).

Así, tenemos que, por 1, 1 es natural. Y, por 2, $1+1$, esto es, 2, también es natural. 3 lo es asimismo, ya que es el resultado de sumarle 1 a 2, que, como dijimos, es un número natural, etc.. Además, sabemos por 3 que $0,5$ no es un número natural, pues jamás podrá obtenerse sumándole 1 a ningún natural.

Contrario al caso de los números naturales, no siempre es posible dar tanto con definiciones explícitas como con recursivas. En algunas ocasiones, sólo contaremos con las definiciones del primer tipo, mientras que en otras, del segundo. Este último es el caso de la noción de *Fórmula de P*. Las cláusulas 1-4 que se detallan a continuación ofrecen una *definición recursiva de Fórmula de P*:

Definición 2.1. *Fórmula bien formada de P.*

1. p seguido de cualquier número finito de $'$ es una fórmula de *P*.[1]
2. Si A es una fórmula de *P*, entonces $\neg A$ es también una fórmula de *P*.
3. Si A y B son fórmulas de *P*, entonces $(A \to B)$ es asimismo una fórmula de *P*.

[1] Muchas veces a lo largo de esta ficha haremos uso de las fórmulas de *P*. Otras tantas haremos mención de sus expresiones y símbolos. En rigor, cada vez que hagamos lo último deberíamos encerrar dichas expresiones o símbolos entre comillas. No obstante, frecuentemente nos tomaremos la libertad de no hacerlo por cuestiones de legibilidad y simpleza, asumiendo que el lector lo sobreentiende.

4. Ninguna expresión que no pueda obtenerse mediante las cláusulas 1-3 en un número finito de pasos es una fórmula de *P*.

Llamaremos '*atómicas*' a las expresiones que se obtienen únicamente aplicando la cláusula 1 de esta definición. Al resto de las fórmulas bien formadas de *P* las denominaremos '*moleculares*'. Si en una expresión molecular la última cláusula aplicada para su construcción es 2, la llamamos '*negación*' y decimos que $\neg$ es su *conectiva principal*. Si, por el contrario, la cláusula final empleada en la construcción es 3, la denominamos '*expresión condicional*' y decimos que $\rightarrow$ es su *conectiva principal*.

p'', $(p''' \rightarrow p')$ y $\neg(p'' \rightarrow \neg p'')$ son fórmulas de *P*, mientras que p, $\neg \rightarrow p'$, $(p' \vee p'')$ y $p''' \rightarrow p'$ no lo son. Pues p carece de $'$ como pide la cláusula 1, $\neg \rightarrow p'$ no puede resultar de la aplicación de 2 ni 3 al igual que $(p' \vee p'')$y $p''' \rightarrow p'$ no tiene los paréntesis exteriores que indica la aplicación de la cláusula 3.

Notemos que los paréntesis exteriores que exige 3 pueden resultar supérfluos cuando ésta es la última cláusula aplicada en la construcción de una fórmula, como en $(p''' \rightarrow p')$. Sin embargo, no siempre lo son. Si tras haber aplicado 3 quisiéramos emplear 2 para obtener una negación de una expresión condicional, no podríamos hacerlo si no hubiéramos colocado en 3 los paréntesis exteriores: de $p''' \rightarrow p'$ obtendríamos $\neg p''' \rightarrow p'$ y no $\neg(p''' \rightarrow p')$, que es lo que deseábamos.

Hasta el momento hemos generado un lenguaje adecuado para la Lógica Proposicional, pero insuficiente. Sólo cuando hayamos especificado el modo de interpretar las fórmulas bien formadas de *P* (la semántica) podremos decir que tenemos un lenguaje *de* la Lógica Proposicional y no meramente *para* ella. De otro modo, estaríamos habilitando interpretaciones no deseadas de las conectivas y de los símbolos proposicionales. Por ejemplo, podríamos interpretar el símbolo $\rightarrow$ como la operación de resta, y las letras proposicionales como perros famosos. De este modo, la fórmula $(p' \rightarrow p'')$ podría ser leída como 'Rintintín - Poochie', lo cual no tiene ningún propósito. Consiguientemente, en el capítulo próximo daremos una semántica para *P*, especificando la familia de interpretaciones permitidas para que este lenguaje sea verdaderamente un lenguaje de la Lógica Proposicional. Así, este tipo de interpretaciones con perros no serán tomadas en cuenta.

Capítulo 3

Una semántica para *P*

Para ofrecer una semántica para el lenguaje proposicional *P* recurriremos al concepto de función. Una función es un objeto matemático que, dados dos conjuntos, uno de partida —llamado '*dominio*'[1] en caso de ser efectivamente una función— y uno de llegada —llamado '*codominio*'—, relaciona un elemento del primero con un y sólo un elemento del segundo. Es importante que todo elemento del dominio esté relacionado con algún elemento del codominio, y que este sea único. Por el contrario, no es necesario que todos los elementos del codominio estén relacionados con algún elemento del dominio, ni que estén relacionados con uno solo.

Las siguientes relaciones representan funciones:

- Siendo el conjunto de partida el de los números naturales y el de llegada el mismo conjunto, a cada número natural se le asigna su doble.
- Teniendo por conjunto de partida a la colección de países del mundo y por conjunto de llegada la de las capitales de dichos países, cada país del mundo

[1] En la lógica utilizamos el término 'dominio' al menos en dos sentidos. El primero es el que estamos introduciendo aquí, como conjunto de partida de una función. El segundo sentido en que empleamos esta palabra es para referirnos al conjunto de objetos de los cuales queremos hablar mediante un lenguaje de predicados de primer orden, al primer objeto del par ordenado que constituye un modelo. El segundo objeto de dicho par es una función que denominamos 'interpretación'. Cabe señalar que el dominio del modelo no es el dominio de esta función sino su conjunto de llegada. ¿Por qué lo llamamos 'dominio' entonces? Pues el conjunto de objetos de los cuales queremos hablar en un caso particular suele llamarse 'dominio de discruso'. Conviene tener esto claro para evitar eventuales confusiones al respecto, aunque aquí no incursionaremos en la Lógica de Predicados de primer orden; nos limitaremos a la Lógica Proposicional. Para una exposición detallada de los lenguajes de predicados de primer orden y su correspondiente semántica modelística, véase Gamut [4], p. 70-120.

se relaciona con su capital.

- Siendo el conjunto de partida el de los alumnos de la carrera de Filosofía y el de llegada el de los números naturales, a cada estudiante de la carrera se le asigna el número de materias que ha aprobado.

Pues sabemos, primero, que todo número natural tiene un doble y que éste es único; segundo, que todo país del mundo tiene una capital y que ésta es única; y, tercero, que todo alumno de Filosofía ha aprobado un número de materias, aunque sea 0, y dicho número es único (se entiende que el número de materias aprobadas es el total y, por ende, si aprobó 3, no aprobó 2).

En cambio, las relaciones que siguen no son funciones:

- Tomando como conjunto de partida el de los números reales y como de llegada el mismo conjunto, a cada número natural se le asigna su doble.
- Teniendo tanto por conjunto de partida como por de llegada el de los seres humanos, cada persona se relaciona con sus hijos.
- Siendo el conjunto de partida el de los alumnos de la carrera de Filosofía y el de llegada el de las materias de la carrera, a cada estudiante le corresponden las materias que ha aprobado.

Pues sabemos, primero, que existen números reales que no son naturales, como π, y, por tanto, existen elementos en el dominio a los cuales no se les está asignando ningún miembro del conjunto de llegada, como a π; segundo, que no toda persona tiene hijos y, además, si los tuviera, puede tener más de uno, incumpliéndose el requisito de unicidad; y, tercero, que es posible que un estudiante de Filosofía no haya aprobado aún ninguna materia o, por el contrario, más de una, incurriendo en lo mismo que el ejemplo anterior.

Aquí emplearemos un tipo especial de funciones que llamaremos '*valuaciones*' para dotar de significado a las expresiones de *P*, asignando a cada fórmula de este lenguaje un único valor, 1 ó 0. El valor 1 representará la verdad y el valor 0 la falsedad. Ése será todo el significado que asignaremos a las expresiones de *P*, por dos razones. En primer lugar, porque, fijando como objetivo el análisis de la validez de los argumentos y la necesariedad de las proposiciones, hemos acordado que tanto una como otra se funda exclusivamente en la transmisión de verdad y en la imposibilidad de falsedad, respectivamente. Y en segundo lugar, porque hemos identificado como únicas causantes de la validez y la necesariedad entendidas en estos términos a ciertas expresiones veritativo-funcionales que denominamos 'conectivas lógicas'. Consecuentemente, para alcanzar nuestro objetivo basta asignar verdad o falsedad a cada una de las expresiones de *P*. Frecuentemente hablaremos de interpretaciones de *P* en términos de valuaciones y viceversa.

Las valuaciónes son pues funciones que tienen por dominio al conjunto de todas las fórmulas de *P*, esto es, todas las secuencias de símbolos que autoriza la Definición 2.1, y por codominio al conjunto $\{0, 1\}$. No cualquier función que cumpla con esta condición será llamada valuación. Por ejemplo, queremos que si una formula A obtiene el valor 1 en una interpretación, $\neg A$ obtenga el valor 0. Luego, daremos una definición precisa que indique qué condiciones debe cumplir una función para ser una ⌜*valuación*⌟:

Definición 3.1. Una ⌜*valuación*⌟ es una función V cuyo dominio es el conjunto de fórmulas de *P* dado por la Definición 2.1 y su codominio $\{0, 1\}$,[2] y además cumple con las siguientes condiciones, para cualesquiera expresiones A y B de *P*:

1. $V(\neg A) = 1 \Leftrightarrow V(A) = 0$.[3]
2. $V(A \rightarrow B) = 1 \Leftrightarrow V(A) = 0$ o $V(B) = 1$.

Al ser funciones, las valuaciones deben asignar a cada elemento del dominio, es decir, a cada fórmula del lenguaje *P*, uno de los dos valores, 0 ó 1, pero nunca ambos. En nuestra lectura, esto implica que cada expresión de *P* es o bien verdadera o bien falsa y que no es posible que sea las dos cosas a la vez. Esta característica se conoce por el nombre de '*bivalencia*'.

Si bien no cualquier función de $\{x : x$ es una fórmula de *P* $\}$ en $\{0, 1\}$ es una valuación, existe una infinidad de funciones que son valuaciones. 1 y 2 imponen estrictos condicionamientos sobre la asignación de valores a las fórmulas moleculares. Sin embargo, nada dicen sobre las expresiones atómicas de *P*. Las valuaciones tienen total libertad con respecto a las últimas. Mientras una valuación, llamémosla 'V_1' asigna el valor 1 a todas las fórmulas atómicas, otra, 'V_2', puede asignar 0 a cada una de ellas y una tercera, 'V_3', podría asignar 1 a las expresiones atómicas con un número impar de $'$ y 0 a aquellas con una cantidad par, como muestra la siguiente tabla:

[2] $V : \{x : x$ es una fórmula de *P* $\} \rightarrow \{0, 1\}$

[3] Si A es una expresión de *P*, escribimos $V(A) = 1$ si la valuación V asigna 1 a la fórmula A, y $V(A) = 0$ si le asigna 0.

	p'	p''	p'''	p''''	p'''''	p''''''	p''''''	...
V_1	1	1	1	1	1	1	1	...
V_2	0	0	0	0	0	0	0	...
V_3	1	0	1	0	1	0	1	...
V_4	0	1	1	1	1	1	1	...
V_5	1	0	0	0	1	0	0	...
...								...

Una vez establecido el valor que una valuación asigna a cada una de las fórmulas atómicas de *P*, el resto de las fórmulas tienen su valor determinado de inmediato. Por ejemplo, dado que la valuación V_5 es tal que $V_5(p') = 1$, tenemos que $V_5(\neg p') = 0$. Y como también $V_5(p'') = 0$, sabemos que $V_5(p' \to p'') = 0$. Lo mismo sucederá con cualquier fórmula molecular en cualquier valuación de la que sepamos qué valores asigna a cada una de las expresiones atómicas de *P*. Luego, existen infinitas de valuaciones dadas por los distintos valores que pueden tomar este tipo de expresiones; hay tantas valuaciones como combinaciones posibles de 0 y 1 en secuencias infinitas.[4]

La asociación del lenguaje *P* presentado en el capítulo anterior con la familia de funciones que hemos llamado valuaciones para su interpretación constituye lo que conocemos por '*Lógica Proposicional*' y hace de *P* un lenguaje ***para*** la Lógica Proposicional.

Definición 3.2. Una valuación V constituye un ***modelo*** para una fórmula A de *P* si y sólo si $V(A) = 1$. De modo análogo, una valuación V constituye un ***modelo*** para un conjunto de expresiones Γ de *P* siempre y cuando $V(A) = 1$ para todo $A \in \Gamma$.[5]

Luego, un modelo para una fórmula es una valuación en la cual la fórmula es verdadera. Por ejemplo, decimos que V_3, presentada en nuestra tabla, es un modelo

[4] Eso último implica que hay tantas valuaciones como números reales. Para una idea general sobre cardinalidades e infinitos de diferente tamaño, véase Hunter [5], capítulo 1, parágrafo 9.

[5] Frecuentemente, la palabra 'modelo' se emplea para mentar cosas diversas. En el estudio de las propiedades metateóricas de la Lógica de Predicados de primer orden y de lógicas de orden superior suele llamarse 'modelo' a aquella estructura que hace el trabajo de las valuaciones en la Lógica Proposicional, esto es, que interpreta el vocabulario no lógico de las expresiones del lenguaje. No obstante, es usual también emplear el mismo término en el sentido de la Defnición 3.2, para referirse a una de estas estructuras en relación con una fórmula o conjunto de fórmulas: una estructura interpretativa (o modelo) es un modelo de una fórmula o conjunto de fórmulas si y sólo si la fórmula o el conjunto de fórmulas son verdaderos de acuerdo con dicha estructura.

Es importante reconocer en cada caso el sentido en el cual la expresión es utilizada. En este texto la usaremos únicamente en este último sentido, pues nos limitaremos al estudio de la Lógica Proposicional, donde las interpretaciones de los símbolos no lógicos del lenguaje se denominan 'valuaciones', no 'modelos'.

para $\neg(p' \to p'')$, pues $V_3(p') = 1$ y $V_3(p'') = 0$ y, por 2, $V_3(p' \to p'') = 0$ y, por 1, $V_3(\neg(p' \to p'')) = 1$.

Definición 3.3. Una fórmula A o conjunto Γ de fórmulas de *P* es *satisfacible* si y sólo si tiene un modelo o, lo que es lo mismo, existe una valuación que asigna el valor 1 a A o a cada uno de los elementos de Γ, según corresponda. Si ése no es el caso, hablamos de fórmulas o conjuntos de fórmulas de *P* *insatisfacibles*.

Para indicar que una valuación asigna 1 a cada uno de los elementos de un conjunto de fórmulas de *P*, Γ, escribimos '$V(\Gamma) = 1$' por cuestiones de comodidad, a pesar de que Γ no sea una expresión de *P* y, por tanto, no sea un miembro del dominio de una función valuación.

Decimos entonces que $\Gamma = \{\neg p', p'', p'''\}$ es satisfacible pues encontramos al menos una valuación, V_4 en nuestra tabla, que asigna 1 a cada uno de sus miembros.

Definición 3.4. Una fórmula A de *P* es *lógicamente válida* o *tautológica* si y sólo si toda valuación asigna el valor 1 a A. Escribimos '$\vDash A$'.

Por ejemplo, $(p' \to p')$ es lógicamente válida, ya que cualquier valuación V es tal que $V(p') = 0$ o $V(p') = 1$ pues las valuaciones son funciones cuyo conjunto de llegada es $\{0, 1\}$; y, por la cláusula 2 de la Definición 3.1, cualquier valuación V es tal que $V(p' \to p') = 1$.

Definición 3.5. Una fórmula A de *P* es *consecuencia semántica* de un conjunto Γ de expresiones de *P* si y sólo si no existe valuación que asigne 1 a todos los elementos de Γ y 0 a A. Equivalentemente, toda valuación que asigne 1 a todos los elementos de Γ de debe asignar también 1 a A. Escribimos '$\Gamma \vDash A$'.

En caso de que Γ contenga un solo elemento, una única expresión B de *P*, escribiremos '$B \vDash A$' en lugar de '$\{B\} \vDash A$', por simplicidad. Si, en cambio, Γ es el conjunto vacío, que notamos con la letra griega minúscula 'ϕ', adoptaremos la siguiente convención: diremos que A es consecuencia semántica del conjunto vacío siempre y cuando A sea una fórmula lógicamente válida:

$$\phi \vDash A \Leftrightarrow \vDash A.$$

Luego, decimos, por ejemplo, que p' es consecuencia semántica de $\{(p'' \to p'), p''\}$, pues una valuación que asigna 1 tanto a $(p'' \to p')$ como a p'' debe asignar o bien 1 a p' y 1 a p'' o bien 0 a p'' y 1 a p'', en vista de la cláusula 2 de la Definición

3.1. La última opción es inviable pues las valuaciones pueden asignar únicamente un valor a cada expresión de *P* y, por tanto, nuestra valuación debe asignar 1 a p', como pide la Definición 3.5.

A continuación enunciaremos y demostraremos algunas verdades sobre '$\vDash$', basándonos en las definiciones que hemos dado en este capítulo. Sean A y B fórmulas cualesquiera de *P* y Γ y Δ conjuntos cualesquiera de expresiones de *P*:

Metateorema 3.1. Si para una valuación V, $V(A) = 1$ y $V(A \to B) = 1 \Rightarrow V(B) = 1$.

Prueba: Si para una valuación V, $V(A) = 1$ y $V(A \to B) = 1$

$\Rightarrow V(A) = 1$ y $(V(A) = 0$ o $V(B) = 1)$ (Def. 3.1, 2)

$\Rightarrow V(A) = 1$ y $V(B) = 1$[6]

$\Rightarrow V(B) = 1$.[7] □

Metateorema 3.2. Si $\vDash A$ y $\vDash (A \to B) \Rightarrow\, \vDash B$.

Prueba: Si $\vDash A$ y $\vDash (A \to B)$

$\Rightarrow$ para toda valuación V, $V(A) = 1$ y $V(A \to B) = 1$ (Def. 3.4)

$\Rightarrow$ para toda valuación V, $V(A) = 1$ y $(V(A) = 0$ o $V(B) = 1)$ (Def. 3.1, 2)

$\Rightarrow$ para toda valuación V, $V(A) = 1$ y $V(B) = 1$

$\Rightarrow$ para toda valuación V, $V(B) = 1$ (Def. 3.4)

$\Rightarrow\, \vDash B$. (Def. 3.4) □

Metateorema 3.3. $A \vDash B \Leftrightarrow\, \vDash (A \to B)$.

Prueba: $A \vDash B$

$\Leftrightarrow$ no existe valuación V tal que $V(A) = 1$ y $V(B) = 0$ (Def. 3.5)

$\Leftrightarrow$ para toda valuación V, $V(A) = 0$ o $V(B) = 1$[8]

$\Leftrightarrow$ para toda valuación V, $V(A \to B) = 1$ (Def. 3.1, 2)

$\Leftrightarrow\, \vDash (A \to B)$. (Def. 3.4) □

[6] Pues sabemos que $V(A) = 0$ o $V(B) = 1$, pero al mismo tiempo $V(A) = 1$ y, por tanto, debemos quedarnos con que $V(B) = 1$, la primera opción es inviable.

[7] Aquí hemos aplicado la regla de Eliminación de la Conjunción a la línea anterior.

[8] Pues toda valuación V es tal que $V(A) = 1$ o $V(A) = 0$. Si $V(A) = 1$, por la línea anterior sabemos que no puede suceder que $V(B) = 0$ y, por tanto, $V(B) = 1$. Luego, $V(B) = 1$ o $V(A) = 0$.

Metateorema 3.4. $A \vDash A$.

Prueba: Como toda valuación es una función, no existe V tal que $V(A) = 1$ y $V(A) = 0$. Entonces, por la Definición 3.5, $A \vDash A$. □

Metateorema 3.5. Si $\Gamma \vDash A \Rightarrow \Gamma \cup \Delta \vDash A$.

Prueba: Si $\Gamma \vDash A$

$\Rightarrow$ no existe valuación V tal que $V(\Gamma) = 1$ y $V(A) = 0$ (Def. 3.5)

$\Rightarrow$ no existe valuación V tal que $V(\Gamma) = 1$ y $V(\Delta) = 1$ y $V(A) = 0$[9]

$\Rightarrow$ no existe valuación V tal que $V(\Gamma \cup \Delta) = 1$ y $V(A) = 0$[10]

$\Rightarrow \Gamma \cup \Delta \vDash A$. (Def. 3.5) □

Metateorema 3.6. Si $\Gamma \vDash A$ y $A \vDash B \Rightarrow \Gamma \vDash B$.

Prueba: Si $\Gamma \vDash A$ y $A \vDash B$

$\Rightarrow$ para toda valuación V, ($V(\Gamma) = 1 \Rightarrow V(A) = 1$) y ($V(A) = 1 \Rightarrow V(B) = 1$) (Def. 3.5)

$\Rightarrow$ para toda valuación V, ($V(\Gamma) = 1 \Rightarrow V(B) = 1$)[11]

$\Rightarrow \Gamma \vDash B$. (Def. 3.5) □

Metateorema 3.7. Si $\Gamma \vDash A$ y $\Gamma \vDash (A \rightarrow B) \Rightarrow \Gamma \vDash B$.

Prueba: Si $\Gamma \vDash A$ y $\Gamma \vDash (A \rightarrow B)$

$\Rightarrow$ para toda valuación V, ($V(\Gamma) = 1 \Rightarrow V(A) = 1$) y ($V(\Gamma) = 1 \Rightarrow V(A \rightarrow B) = 1$) (Def. 3.5)

$\Rightarrow$ para toda valuación V, ($V(\Gamma) = 1 \Rightarrow V(A) = 1$ y $V(A \rightarrow B) = 1$)

$\Rightarrow$ para toda valuación V, ($V(\Gamma) = 1 \Rightarrow V(A) = 1$ y ($V(A) = 0$ o $V(B) = 1$)) (Def. 3.1, 2)

$\Rightarrow$ para toda valuación V, ($V(\Gamma) = 1 \Rightarrow V(A) = 1$ y $V(B) = 1$)

$\Rightarrow$ para toda valuación V, ($V(\Gamma) = 1 \Rightarrow V(B) = 1$)

$\Rightarrow \Gamma \vDash B$. (Def. 3.5) □

[9] Si no existe una valuación V tal que $V(\Gamma) = 1$ y $V(A) = 0$ tampoco existirá una valuación que haga eso y además asigne 1 a Δ.

[10] Si no existe una valuación V tal que $V(\Gamma) = 1$ y $V(\Delta) = 1$ y $V(A) = 0$, tampoco existirá una valuación V tal que $V(\Gamma \cup \Delta) = 1$ y $V(A) = 0$ pues, si existiera, tendríamos que V asignaría 1 a todas las expresiones de Γ y a todas las expresiones de Δ y a A y, por ende, que $V(\Gamma) = 1$ y $V(\Delta) = 1$ y $V(A) = 0$, contradiciendo la línea anterior.

[11] Aquí hemos aplicado el Silogismo Hipotético a la línea anterior.

Metateorema 3.8. Si $\models A \Rightarrow \Gamma \models A$.

Prueba: Si $\models A$

$\Rightarrow$ para toda valuación V, $V(A) = 1$ (Def. 3.4)

$\Rightarrow$ no existe valuación V tal que $V(A) = 0$

$\Rightarrow$ no existe valuación V tal que $V(\Gamma) = 1$ y $V(A) = 0$

$\Rightarrow \Gamma \models A$. (Def. 3.5) $\square$

Ejercicios

Ejercicio 3.1. Demuestre que para cualesquiera fórmulas A, B y C de *P* y cualesquiera conjuntos Γ y Δ de expresiones de este lenguaje:

1. $\models A \Rightarrow \models (B \to A)$.
2. $\models \neg A \Rightarrow \models (A \to B)$.
3. $\models \neg B$ y $\models (A \to B) \Rightarrow \models \neg A$.
4. $\models A$ y $\models \neg B \Rightarrow \models ((A \to B) \to B)$.
5. $\models (A \to B)$ y $\models (B \to C) \Rightarrow \models (A \to C)$.
6. $A \models (B \to C)$ y $\models (A \to B) \Rightarrow A \models C$.
7. $A \models B \Leftrightarrow \neg B \models \neg A$.
8. $\models (\neg A \to \neg B) \Leftrightarrow \models (B \to A)$.
9. $\models (\neg B \to \neg A)$ y $\models A \Rightarrow \models B$.
10. Si Δ es insatisfacible y $\Delta \subseteq \Gamma \Rightarrow \Gamma$ es insatisfacible.
11. Si $\Gamma \cup \{\neg A\}$ es insatisfacible $\Rightarrow \Gamma \models A$.

Ejercicio 3.2. Indique si las siguientes afirmaciones para cualesquiera fórmulas A y B de *P* son verdaderas o falsas y justifique su respuesta:

1. $\vDash (A \to B) \Leftrightarrow \vDash \neg A$ y $\vDash B$
2. $\vDash (A \to B) \Leftrightarrow \vDash \neg A$ o $\vDash B$
3. $A \vDash \neg\neg A$ y $\neg\neg A \vDash A$
4. $\vDash ((A \to B) \to A)$
5. $\vDash (A \to (B \to A))$

Soluciones

Ejercicio 3.1.

1. Si $\vDash A$

   $\Rightarrow$ para toda valuación V, $V(A) = 1$ (Def. 3.4)

   $\Rightarrow$ para toda valuación V, $V(B) = 0$ o $V(A) = 1$[12]

   $\Rightarrow$ para toda valuación V, $V(B \to A) = 1$ (Def. 3.1, 2)

   $\Rightarrow \vDash (B \to A)$. (Def. 3.4) $\square$

2. Si $\vDash \neg A$

   $\Rightarrow$ para toda valuación V, $V(\neg A) = 1$ (Def. 3.4)

   $\Rightarrow$ para toda valuación V, $V(A) = 0$ (Def. 3.1, 1)

   $\Rightarrow$ para toda valuación V, $V(A) = 0$ o $V(B) = 1$

   $\Rightarrow$ para toda valuación V, $V(A \to B) = 1$ (Def. 3.1, 2)

   $\Rightarrow \vDash (A \to B)$. (Def. 3.4) $\square$

3. Si $\vDash \neg B$ y $\vDash (A \to B)$

   $\Rightarrow$ para toda valuación V, $V(\neg B) = 1$ y $V(A \to B) = 1$ (Def. 3.4)

   $\Rightarrow$ para toda valuación V, $V(B) = 0$ y ($V(A) = 0$ o $V(B) = 1$) (Def. 3.1, 1 y 2)

   $\Rightarrow$ para toda valuación V, $V(B) = 0$ y $V(A) = 0$

[12] Sabemos que la disyunción $V(B) = 0$ o $V(A) = 1$ es verdadera pues, de antemano, sabíamos que uno de sus disyuntos, $V(A) = 1$, lo era. Hemos aplicado entonces la regla de Introducción de la Disyunción a la línea anterior.

$\Rightarrow$ para toda valuación V, $V(A) = 0$

$\Rightarrow$ para toda valuación V, $V(\neg A) = 1$ (Def. 3.1, 1)

$\Rightarrow \models \neg A$. (Def. 3.4) $\square$

4. Si $\models A$ y $\models \neg B$

   $\Rightarrow$ para toda valuación V, $V(A) = 1$ y $V(\neg B) = 1$ (Def. 3.4)

   $\Rightarrow$ para toda valuación V, $V(A) = 1$ y $V(B) = 0$ (Def. 3.1, 1)

   $\Rightarrow$ para toda valuación V, $V(A \to B) = 0$[13] (Def. 3.1, 2)

   $\Rightarrow$ para toda valuación V, $V(A \to B) = 0$ o $V(B) = 1$

   $\Rightarrow$ para toda valuación V, $V((A \to B) \to B) = 1$ (Def. 3.1, 2)

   $\Rightarrow \models ((A \to B) \to B)$. (Def. 3.4) $\square$

5. Si $\models (A \to B)$ y $\models (B \to C)$

   $\Rightarrow$ para toda valuación V, $V(A \to B) = 1$ y $V(B \to C) = 1$ (Def. 3.4)

   $\Rightarrow$ para toda valuación V, ($V(A) = 0$ o $V(B) = 1$) y ($V(B) = 0$ o $V(C) = 1$) (Def. 3.1, 2) [1].

   Supóngase que $\not\models (A \to C)$

   $\Rightarrow$ existe una valuación V' tal que $V'(A \to C) = 0$ (Def. 3.4)

   $\Rightarrow$ existe una valuación V' tal que $V'(A) = 1$ y $V'(C) = 0$. (Def. 3.1, 2)

   Por [1], ($V'(A) = 0$ o $V'(B) = 1$) y ($V'(B) = 0$ o $V'(C) = 1$)[14]

   $\Rightarrow$ como $V'(A) = 1$, en la primera disyunción debemos elegir $V'(B) = 1$; y como $V'(C) = 0$, en la segunda tenemos que $V'(B) = 0$, lo cual es imposible. El absurdo partió de suponer que $\not\models (A \to C)$. Luego, $\models (A \to C)$.[15] $\square$

6. Si $A \models (B \to C)$ y $\models (A \to B)$

   $\Rightarrow$ para toda valuación V, ($V(A) = 1 \Rightarrow V(B \to C) = 1$) y $V(A \to B) = 1$ (Def. 3.4 y 3.5)

   $\Rightarrow$ para toda valuación V, ($V(A) = 1 \Rightarrow$ ($V(B) = 0$ o $V(C) = 1$)) y ($V(A) = 0$ o $V(B) = 1$) (Def. 3.1, 2) [2]

[13] Pues si $V(A) = 1$ y $V(B) = 0$, como indica la línea anterior, sabemos que ni $V(A) = 0$ ni $V(B) = 1$ y por tanto que no es cierto que $V(A) = 0$ o $V(B) = 1$. Con lo cual $V(A \to B) \neq 1$ y, luego, $V(A \to B) = 0$.

[14] Puesto que en [1] se afirma algo acerca de *todas* las valuaciones, y V' es una de ellas, podemos decir que aquello que se afirma en [1] vale también para V', cualquiera sea esta valuación.

[15] Notemos que hemos aplicado la regla de Introducción de la Negación para concluir que $\models (A \to C)$.

Supóngase que $A \nvDash C$

$\Rightarrow$ existe una valuación V' tal que $V'(A) = 1$ y $V'(C) = 0$. (Def. 3.5)

Por el primer conyunto de [2], sabemos que, como $V'(A) = 1$, $V'(B) = 0$ o $V'(C) = 1$. Y, como $V'(C) = 0$, que $V'(B) = 0$. Además, por el segundo conyunto, tenemos que $V'(A) = 0$ o $V'(B) = 1$. Pero, dado que $V'(A) = 1$, debemos afirmar que $V'(B) = 1$, lo cual es un absurdo pues hemos dicho en la oración anterior que $V'(B) = 0$. El absurdo partió de suponer que $A \nvDash C$. Luego, $A \vDash C$. □

7. $A \vDash B$

   $\Leftrightarrow$ no existe valuación V tal que $V(A) = 1$ y $V(B) = 0$ (Def. 3.5)

   $\Leftrightarrow$ no existe valuación V tal que $V(\neg A) = 0$ y $V(\neg B) = 1$ (Def. 3.1, 1)

   $\Leftrightarrow \neg B \vDash \neg A$. (Def. 3.5) □

8. $\vDash (\neg A \to \neg B)$

   $\Leftrightarrow$ para toda valuación V, $V(\neg A \to \neg B) = 1$ (Def. 3.4)

   $\Leftrightarrow$ para toda valuación V, $V(\neg A) = 0$ o $V(\neg B) = 1$ (Def. 3.1, 2)

   $\Leftrightarrow$ para toda valuación V, $V(A) = 1$ o $V(B) = 0$ (Def. 3.1, 1)

   $\Leftrightarrow$ para toda valuación V, $V(B \to A) = 1$ (Def. 3.1, 2)

   $\Leftrightarrow \vDash (B \to A)$. (Def. 3.4) □

9. Si $\vDash (\neg B \to \neg A)$ y $\vDash A$

   $\Rightarrow \vDash (A \to B)$ y $\vDash A$ (Ejer. 3.1, 8)

   $\Rightarrow$ para toda valuación V, $V(A \to B) = 1$ y $V(A) = 1$ (Def. 3.4)

   $\Rightarrow$ para toda valuación V, ($V(A) = 0$ o $V(B) = 1$) y $V(A) = 1$ (Def. 3.1, 2)

   $\Rightarrow$ para toda valuación V, $V(B) = 1$ y $V(A) = 1$

   $\Rightarrow$ para toda valuación V, $V(B) = 1$

   $\Rightarrow \vDash B$. (Def. 3.4) □

10. Si Δ es insatisfacible y $\Delta \subseteq \Gamma$

    $\Rightarrow \Gamma = \Gamma \cup \Delta$[16] y no existe una valuación V tal que $V(\Delta) = 1$ (Def. 3.3)

    $\Rightarrow \Gamma = \Gamma \cup \Delta$ y no existe una valuación V tal que $V(\Delta) = 1$ y $V(\Gamma) = 1$

[16] Sabemos que $\Gamma = \Gamma \cup \Delta$ pues, como Δ es un subconjunto de Γ, todos sus miembros ya están en Γ. Luego, incorporárselos no agrega nada.

$\Rightarrow \Gamma = \Gamma \cup \Delta$ y no existe una valuación V tal que $V(\Gamma \cup \Delta) = 1$[17]

$\Rightarrow$ no existe una valuación V tal que $V(\Gamma \cup \Delta) = 1$

$\Rightarrow \Gamma \cup \Delta$ es insatisfacible. (Def. 3.3) $\square$

11. Si $\Gamma \cup \{\neg A\}$ es insatisfacible

$\Rightarrow$ no existe una valuación V tal que $V(\Gamma \cup \{\neg A\}) = 1$ (Def. 3.3)

$\Rightarrow$ no existe una valuación V tal que $V(\Gamma) = 1$ y $V(\neg A) = 1$

$\Rightarrow$ no existe una valuación V tal que $V(\Gamma) = 1$ y $V(A) = 0$ (Def. 3.1, 1)

$\Rightarrow \Gamma \vDash A$. (Def. 3.5) $\square$

Ejercicio 3.2.

1. Faslo; sólo vale la dirección del bicondicional que va de derecha a izquierda. Pues si $\neg A$ es siempre 1, A es siempre 0en virtud de la cláusula 1 de la Definición 3.1 y, por ende, $(A \rightarrow B)$ es siempre 1, por la cláusula 2 de esa definición. La otra dirección no es acertada pues, por ejemplo, es cierto que $\vDash (p' \rightarrow p')$ pero no es cierto que $\vDash \neg p'$ ni que $\vDash p'$.

2. Véase la respuesta al inciso anterior.

3. Verdadero, pues si una valuación V asigna 1 a A, asignará 0 $\neg A$ en virtud de la cláusula 1 de la Definición 3.1 y, por ende, 1 a $\neg\neg A$ por esa misma cláusula, y viceversa.

4. Falso, pues si A es p' y B es p'', existe una valuación que asigna 0 a A y 1 a B y, por la cláusula 2 de la Definición 3.1, 1 a $(A \rightarrow B)$, pero 0 a A. Luego, por la misma cláusula, sabemos que esa valuación asignará 0 a $((A \rightarrow B) \rightarrow A)$.

5. Verdadero, pues quien quiera que sea A, si una valuación le asigna el valor 1 entonces, por la cláusula 2 de la Definición 3.1, $(B \rightarrow A)$ será 1 y lo mismo sucederá con la expresión entera. Y si una valuación le asigna 0 a A, entonces el antecedente de la fórmula será 0 y, nuevamente, por la cláusula 2, la expresión entera obtendrá el valor 1.

[17] Como no existe una valuación V tal que $V(\Delta) = 1$ y $V(\Gamma) = 1$ por la línea anterior, sabemos que no existe una valuación V tal que $V(\Gamma \cup \Delta) = 1$ pues, si existiera, haría verdaderos a todos los miembros de $\Gamma \cup \Delta$ y, consecuentemente, a todos los miembros de Γ y a todos los miembros de Δ.

Capítulo 4

Un aparato deductivo para la Lógica Proposicional

Un aparato deductivo es una sistematización de una teoría. Básicamente, consiste en pequeñas operaciones sintácticas que nos llevan de ciertas oraciones de un lenguaje hasta otras, sin hacer ninguna alusión a la semántica involucrada. Por ejemplo, la regla "agregar una 's' en el extremo derecho de una palabra si la última letra es vocal y agregar 'es' si es consonante" es una regla puramente formal que nos permite pasar de "bañista francés" a "bañistas franceses". Del mismo modo, la regla "agregar una 'r' en el extremo derecho de una palabra" nos permite pasar de "bañista francés" a "bañistar francésr". Ambas reglas son igualmente legítimas desde el punto de vista sintáctico. Sin embargo, la primera puede resultar útil si lo que queremos es hacer una teoría de los plurales en castellano.

En el caso de la lógica, el objetivo es hacer una teoría acerca de la relación de consecuencia, como mencionamos en el Capítulo 1. Por ende, nos interesarán aquellas transformaciones que la reflejen. En este punto, la pregunta inmediata debería ser ¿cuál es la necesidad de abordar una consecuencia sintáctica cuando ya hemos analizado la consecuencia semántica? Si el análisis es adecuado, entonces podemos reflejar todos los casos de consecuencia que puedan representarse en el lenguaje. Por lo tanto, un enfoque sintáctico debería coincidir con el semántico, y sería superfluo. Si bien lo primero es cierto, lo segundo no lo es.

Estas transformaciones tienen fundamentalmente dos aspectos interesantes: que se realizan de a pasos muy pequeños y que podemos limitar las reglas de transformación a un conjunto muy reducido. Esto le aporta a la teoría un componente epistémico que quedaba relegado en la noción puramente semántica de justificación.

Para entender estas dos motivaciones, veamos primero dos modos posibles de dotar a una teoría de un aparato deductivo.

Una primera posibilidad es elegir un conjunto mínimo de afirmaciones verdaderas, llamadas axiomas, a partir de la cual puedan deducirse todas las otras afirmaciones que incumben a la teoría. Lo que obtenemos de este modo se denomina "*sistema axiomático*".

Una segunda posibilidad es elegir un conjunto mínimo de formas válidas de razonamiento, tratarlas como reglas de inferencia y reducir todas las demás a sucesivas aplicaciones de ellas. Lo que obtenemos de este modo se denomina "*sistema de deducción natural*".

Ambos enfoques son equivalentes y pueden ser combinados (como probaremos más adelante en el apéndice). Cada uno tiene sus ventajas respectivas. Los sistemas de deducción natural pretenden que sus pruebas resulten lo más similares posibles al modo en que de hecho se efectúan los razonamientos en la práctica informal (en particular, en la práctica matemática). Por ello, resultan muy prácticos para realizar pruebas dentro del sistema, puesto que reducen la complejidad de las fórmulas necesarias para realizarlas y permiten elaborar las estrategias con mayor facilidad. Los sistemas axiomáticos, por su parte, son ideales para obtener resultados metateóricos, razón por la cual así será como trabajaremos con aquí (aunque agregaremos a los axiomas una única regla de inferencia, el *Modus Ponens*). La conveniencia de esta elección podrá verse a medida que avance el capítulo. Para determinar si se cumple una relación de consecuencia sintáctica, deberemos considerar las distintas maneras de llegar de una fórmula a otra. Si tuviéramos un sistema de deducción natural, las opciones se multiplicarían, mientras que de esta manera, sólo tenemos tres: premisas, axiomas y el *Modus Ponens*.

Vale la pena aclarar que no existe una única manera de armar un sistema de deducción natural o un sistema axiomático. Hay diversos conjuntos de reglas y axiomas que dan los mismos resultados. De todas formas, el conjunto escogido para P es bastante habitual.

Podemos, ahora sí, volver a las motivaciones desde el punto de vista de la justificación epistémica. Por un lado, lo reducido del conjunto nos permite delimitar los elementos mínimos que la teoría nos exige que aceptemos (ya sean oraciones o esquemas de razonamiento que darán lugar a las reglas de transformación). Por otro lado, la reducción de cualquier caso de consecuencia a sucesivas operaciones sencillas nos permite elaborar una justificación de la conclusión en la cual los vínculos inferenciales sean tan explícitos y aprehensibles como sea posible.

Una característica importante, aunque no esencial, en un aparato deductivo es la denominada *independencia.* En un sistema independiente, los axiomas y reglas elegidos son todos necesarios para obtener la totalidad de los enunciados verdaderos de la teoría. Si además son suficientes, decimos que el aparato deductivo es *completo.* Éste es un rasgo altamente deseable. Con frecuencia, un número finito de axiomas no es suficiente para la obtención de todas las verdades de una teoría. La solución usual consiste en adoptar una cantidad finita de *esquemas de axioma* que generen los axiomas necesarios al interior del aparato. Si bien parece que la pretensión de claridad y simplicidad ha sido desoída, ése no es el caso. La trasparencia y finitud de los esquemas de axioma permiten fácilmente saber qué enunciados son axiomas y cuáles no.

Por último, si las oraciones que se obtienen a partir de las reglas y los axiomas del sistema son todas verdades acerca de los objetos de la teoría que se quiere sistematizar, decimos que el sistema es *correcto.* Un aparato deductivo incorrecto no cumple con el propósito inicial para el cual fue creado, a saber, la sistematización de las verdades de una teoría. La corrección es una nota esencial y todo sistema que no la tenga debe ser descartado.

El fin de este capítulo es ofrecer un aparato deductivo para la Lógica Proposicional. Como señalamos en la introducción, la Lógica Proposicional se ocupa de las tautologías y de la validez de ciertas inferencias. En consecuencia, elegiremos como axiomas enunciados tautológicos y como reglas de derivación esquemas válidos de razonamiento. Puesto que estos esquemas preservan la verdad, nos permitirán inferir únicamente tautologías a partir de los axiomas. No obstante, no utilizaremos la semántica desarrollada en el capítulo 3 para saber qué enunciados obtendremos y cuáles no, sino que nos limitaremos, justamente, a aquello que podamos derivar a partir de los axiomas empleando únicamente las reglas de derivación que escogeremos. Veámoslo con más precisión.

Definición 4.1. El sistema axiomático *SP* consta de los axiomas que pueden obtenerse reemplazando uniformemente las letras esquemáticas A, B y C en los siguientes tres esquemas de axioma por fórmulas de *P*:

(SP_1) $(A \to (B \to A))$

(SP_2) $((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$

(SP_3) $((\neg A \to \neg B) \to (B \to A))$

Y también de la sola regla de derivación conocida como '*Modus Ponens*' (en adelante, '*MP*'): si A y B son fórmulas de *P*, entonces B es una consecuencia inmediata de A y $(A \to B)$.

Notemos que expresiones como $(A \to (B \to A))$ y la enunciación de *MP* pertenecen al metalenguaje, no al lenguaje objeto. Pues las letras A, B y C no son fórmulas de *P* sino que indican lugares de fórmulas de *P*. Cada reemplazo de ellas por verdaderas expresiones de nuestro lenguaje formal dará lugar a fórmulas de *P*, que en el caso de SP_1, SP_2 y SP_3 serán axiomas de *SP*. De este modo, *SP* tiene una infinidad de axiomas en virtud de estos tres esquemas. Los siguientes, por ejemplo, son axiomas de *SP*:

$(p' \to (p''' \to p'))$ por SP_1

$((p' \to (p''' \to p')) \to ((p' \to p'''') \to (p' \to p')))$ por SP_2

$((\neg p'''' \to \neg p'') \to (p'' \to p''''))$ por SP_3

Por *MP*, decimos que $((p' \to p'''') \to (p' \to p'))$ es una consecuencia inmediata de $(p' \to (p''' \to p'))$ y $((p' \to (p''' \to p')) \to ((p' \to p'''') \to (p' \to p')))$; y que p'' es una consecuencia inmediata de $(p' \to p'')$ y p'.

Definición 4.2. Una *demostración* en *SP* de una fórmula A es una tira finita de fórmulas de *P*, cada una de las cuales es o bien un axioma de *SP* o bien una consecuencia inmediata por *MP* de dos fórmulas anteriores en la tira, y cuya última expresión es A.

La siguiente es una demostración en *SP* de $(p' \to p')$:

1. $(p' \to ((p' \to p') \to p'))$ Axioma, por SP_1
2. $((p' \to ((p' \to p') \to p')) \to ((p' \to (p' \to p')) \to (p' \to p')))$ Axioma, por SP_2
3. $(p' \to (p' \to p'))$ Axioma, por SP_1
4. $((p' \to (p' \to p')) \to (p' \to p'))$ *MP* 1, 2
5. $(p' \to p')$ *MP* 3, 4

Estrictamente hablando, la prueba está dada sólo por la tira de fórmulas 1-5. Ni los números que se encuentran a su izquierda, mediante los cuales hacemos referencia a ellas, ni las notas que están a su derecha forman parte de la demostración. Estas últimas son meramente una justificación de cada uno de los pasos para dejar en claro que la tira de expresiones de *P* constituye una demostración.

Definición 4.3. Una fórmula A de *P* es un *teorema* de *SP* si y sólo si existe una demostración de A en *SP*. Lo notamos '$\vdash A$'.

Por ejemplo, decimos que $(p' \to p')$ es un teorema de *SP*, pues recién hemos mostrado que existe una tira finita de expresiones de *P*, cada una de las cuales es o bien un axioma de *SP* o bien una consecuencia inmediata de dos fórmulas anteriores en la tira por *MP*, y cuyo último elemento es $(p' \to p')$. Hemos dado con una demostración de $(p' \to p')$ en *SP*.

Notemos que, en virtud de la Definición 4.3, todo axioma de *SP* es a la vez un teorema de *SP*, ya que las tiras que contienen como único elemento a cada axioma de este sistema son tiras finitas de expresiones de *P*, cada una de las cuales es o bien un axioma o bien una consecuencia inmediata de dos fórmulas anteriores de la tira por *MP*, y la última expresión es dicho axioma. La siguiente, por ejemplo, es una demostración de un axioma de *SP*:

1. $(p' \to ((p' \to p') \to p'))$ Axioma, por SP_1

Esto implica que $(p' \to ((p' \to p') \to p'))$ es un teorema:

$$\vdash (p' \to ((p' \to p') \to p'))$$

Definición 4.4. Una tira de fórmulas de *P* es una *derivación* en *SP* de una fórmula A a partir de un conjunto de fórmulas Γ de *P* si y sólo si es una secuencia finita de expresiones, cada una de las cuales es o bien un axioma de *SP*, o bien un miembro de Γ, o bien una consecuencia inmediata de dos fórmulas anteriores por *MP*, y la última expresión de la tira es A.

La siguiente es una derivación de $(p' \to p''')$ a partir del conjunto $\Gamma = \{(p' \to p''), (p'' \to p''')\}$:

1. $(p' \to p'')$ Miembro de Γ
2. $(p'' \to p''')$ Miembro de Γ
3. $((p' \to (p'' \to p''')) \to ((p' \to p'') \to (p' \to p''')))$ Axioma, por SP_2
4. $((p'' \to p''') \to (p' \to (p'' \to p''')))$ Axioma, por SP_1
5. $(p' \to (p'' \to p'''))$ *MP* 2, 4
6. $((p' \to p'') \to (p' \to p'''))$ *MP* 3, 5
7. $(p' \to p''')$ *MP* 1, 6

Una vez más, sólo las expresiones de *P* que aparecen en esta lista son parte de la derivación. Los números de la izquierda y las aclaraciones de la derecha son meramente accesorias, para una mejor comprensión de la derivación.

Notemos que la diferencia entre una demostración y una derivación está en que la última permite que elementos de un conjunto cualquiera de fórmulas de *P* aparezcan en la tira, no únicamente axiomas o consecuencias inmediatas de expresiones anteriores. Sin embargo, ése no es un requisito necesario en la definición de 'derivación' y, por tanto, toda demostración constituye una derivación a partir del conjunto vacío y también de cualquier conjunto de expresiones de *P*, en virtud de la Definición 4.4. La conversa no vale, esto es, no toda derivación es una demostración. Por ejemplo, la derivación que hemos visto no lo es, pues contiene fórmulas que no son ni axiomas ni consecuencia de dos expresiones anteriores, como 1 y 2.

Una vez que hemos demostrado un teorema, éste puede jugar un papel similar al de un axioma en cualquier demostración o derivación ulterior. Pues sabemos que, si una fórmula A es un teorema, existe una demostración, una tira finita de fórmulas que son o bien axiomas o bien consecuencias inmediatas por *MP* de dos expresiones anteriores. Esta tira puede incorporarse cuando se requiera a cualquier otra demostración o derivación, contando así con A en ellas. Por tanto, nos tomaremos frecuentemente la licencia de emplear teoremas como si fueran axiomas, ofreciendo demostraciones o deducciones *abreviadas*, en las cuales omitiremos los pasos de la demostración de aquellos teoremas por haberlos explicitado con anterioridad.

Definición 4.5. Una fórmula A de *P* es *consecuencia sintáctica* de un conjunto Γ de expresiones de *P* si y sólo si existe una derivación de A a partir de Γ. Lo notamos '$\Gamma \vdash A$'.

Luego, $(p' \to p''')$ es una consecuencia sintáctica de $\{(p' \to p''), (p'' \to p''')\}$:

$$\{(p' \to p''), (p'' \to p''')\} \vdash (p' \to p''')$$

Si una fórmula B es consecuencia sintáctica de un conjunto de fórmulas Γ cuyo único miembro es la fórmula A escribimos '$A \vdash B$' en lugar de '$\{A\} \vdash B$', por comodidad.

Definición 4.6. Un conjunto Γ de fórmulas de *P* es *consistente* si y sólo si no existe una fórmula B de *P* tal que $\Gamma \vdash B$ y $\Gamma \vdash \neg B$ a la vez. Γ es *inconsistente* si y sólo si existe una fórmula B tal que $\Gamma \vdash B$ y $\Gamma \vdash \neg B$ a la vez. Análogamente, una fórmula A de *P* es inconsistente o consistente según exista o no una fórmula B tal que $A \vdash B$ y $A \vdash \neg B$ a la vez.

Notemos que la consistencia o inconsistencia de un conjunto de expresiones de *P* no está formulada en función de los elementos del conjunto sino de las fórmulas que pueden derivarse de él. Por tanto, no es necesario que un conjunto posea como miembros dos fórmulas, una de las cuales es la negación de la otra, para ser un conjunto inconsistente. El siguiente es un conjunto inconsistente de fórmulas:

$$\Delta = \{p', (p' \to p''), \neg p''\}$$

Pues es posible derivar a partir de Δ tanto p'':

1.	p'	Miembro de Δ
2.	$(p' \to p'')$	Miembro de Δ
3.	p''	*MP* 1, 2

como $\neg p''$:

1.	$\neg p''$	Miembro de Δ

Y, por ende, $\Delta \vdash p''$ y $\Delta \vdash \neg p''$. Ahora bien, ningún par de expresiones pertenecientes a Δ es tal que una es la negación de la otra.

La Definición 4.6 hace explícita referencia al sistema *SP*; no es útil para hablar de la consistencia o inconsistencia dentro otros sistemas. La noción de consistencia puede definirse similarmente para aparatos deductivos diferentes y qué conjuntos o fórmulas son consistentes o no depende enteramente de cuáles sean estos sistemas.

A continuación enunciaremos y demostraremos algunas verdades sobre '$\vdash$', basándonos en las definiciones que hemos dado en este capítulo. Sean A y B fórmulas cualesquiera de *P* y Γ y Δ conjuntos cualesquiera de expresiones de *P*.

Metateorema 4.1. $A \vdash A$.[1]

Prueba: La siguiente es una derivación de A a partir de $\{A\}$:

1.	A	Miembro de $\{A\}$

□

[1] O $\{A\} \vdash A$, que es lo mismo, como ya señalamos.

Metateorema 4.2. Si $\Gamma \vdash A \Rightarrow \Gamma \cup \Delta \vdash A$.

Prueba: Si $\Gamma \vdash A$

$\Rightarrow$ existe una derivación de A a partir de Γ (Def. 4.5)

$\Rightarrow$ existe una tira finita de fórmulas, cada una de las cuales es o bien un axioma, o bien un miembro de Γ, o bien una consecuencia por *MP* de dos expresiones anteriores, y cuya última fórmula es A (Def. 4.4)

$\Rightarrow$ existe una tira finita de fórmulas, cada una de las cuales es o bien un axioma, o bien un miembro de Γ o de Δ, o bien una consecuencia por *MP* de dos expresiones anteriores, y cuya última fórmula es A[2]

$\Rightarrow$ existe una tira finita de fórmulas, cada una de las cuales es o bien un axioma, o bien un miembro de $\Gamma \cup \Delta$, o bien una consecuencia por *MP* de dos expresiones anteriores, y cuya última fórmula es A[3]

$\Rightarrow$ existe una derivación de A a partir de $\Gamma \cup \Delta$ (Def. 4.4)

$\Rightarrow \Gamma \cup \Delta \vdash A$. (Def. 4.5) □

Metateorema 4.3. Si $\Gamma \vdash A$ y $A \vdash B \Rightarrow \Gamma \vdash B$.

Prueba: Si $\Gamma \vdash A$ y $A \vdash B$

$\Rightarrow$ existe una derivación de A a partir de Γ y otra de B a partir de A (Def. 4.5)

$\Rightarrow$ existe una tira finita de fórmulas, $A_1, ..., A_n, A$, cuyos elementos son o bien un axioma, o bien un miembro de Γ, o bien una consecuencia por *MP* de dos expresiones anteriores; y existe otra tira finita de fórmulas, $B_1, ..., B_m, B$, cada uno de cuyos elementos es o bien un axioma, o bien A, o bien una consecuencia por *MP* de dos expresiones anteriores (Def. 4.4)

$\Rightarrow$ la tira $A_1, ..., A_n, A, B_1, ..., B_m, B$, que resulta de escribir las fórmulas de la segunda tira a continuación de las de la primera, es (i) finita, pues su longitud es la suma de las longitudes de $A_1, ..., A_n, A$ y $B_1, ..., B_m, B$, que eran finitas; (ii) cada una de sus fórmulas es o bien un axioma, o bien un miembro de Γ, o bien una consecuencia por *MP* de dos expresiones anteriores, pues $A_1, ..., A_n, A$ cumple esos requisitos y $B_1, ..., B_m, B$ agrega únicamente A, que, por aparecer en $A_1, ..., A_n, A$, es o bien un axioma o bien un miembro

[2] Por la regla de Introducción de la Disyunción.

[3] Si sabemos que un objeto (por ejemplo, una fórmula) es miembro o bien de un conjunto Γ o bien de uno $Delta$, estamos en condiciones de afirmar que pertenece a $\Gamma \cup \Delta$, pues en este último se encuentran todos los miembros del primer conjunto y todos los miembros del segundo reunidos.

de Γ o bien una consecuencia por *MP* de dos expresiones anteriores; y (iii) su última fórmula es B.

$\Rightarrow$ existe una derivación de B a partir de Γ (Def. 4.4)

$\Rightarrow \Gamma \vdash B$. (Def. 4.5) $\square$

Metateorema 4.4. Si $\Gamma \vdash A$ y $\Gamma \vdash (A \to B) \Rightarrow \Gamma \vdash B$.

Prueba: Si $\Gamma \vdash A$ y $\Gamma \vdash (A \to B)$

$\Rightarrow$ existe una derivación de A y otra de $(A \to B)$ a partir de Γ (Def. 4.5)

$\Rightarrow$ existen dos tiras finitas de fórmulas, $A_1, ..., A_n, A$ y $B_1, ..., B_n, (A \to B)$, cada uno de cuyos miembros es o bien un axioma o bien un elemento de Γ o bien una consecuencia de dos expresiones anteriores por *MP* (Def. 4.4)

$\Rightarrow A_1, ..., A_n, A, B_1, ..., B_n, (A \to B), B$ es una tira (i) finita, pues su longitud un número más que la suma de las longitudes de $A_1, ..., A_n, A$ y $B_1, ..., B_n, (A \to B)$, que eran finitas; (ii) cada uno de sus miembros es o bien un axioma o bien un miembro de Γ o bien una consecuencia por *MP* de dos expresiones anteriores, pues tanto $A_1, ..., A_n, A$ como $B_1, ..., B_n, (A \to B)$ cumplen con esos requisitos y B es una consecuencia por *MP* de A y $(A \to B)$, dos fórmulas anteriores; y (iii) su última fórmula es B

$\Rightarrow$ existe una derivación de B a partir de Γ (Def. 4.4)

$\Rightarrow \Gamma \vdash B$. (Def. 4.5) $\square$

Metateorema 4.5. Si $\vdash A \Rightarrow \Gamma \vdash A$.

Prueba: Si $\vdash A$

$\Rightarrow$ existe una demostración de A (Def. 4.3)

$\Rightarrow$ existe una tira finita de fórmulas en la que cada una es o bien un axioma o bien una consecuencia de dos expresiones anteriores por *MP*, y la última de las cuales es A (Def. 4.2)

$\Rightarrow$ existe una tira finita de fórmulas en la que cada una es o bien un axioma o bien un miembro de Γ o bien una consecuencia de dos expresiones anteriores por *MP*, y la última de las cuales es A[4]

$\Rightarrow$ existe una derivación de A a partir de Γ (Def. 4.4)

$\Rightarrow \Gamma \vdash A$. (Def. 4.5) $\square$

[4] Por la regla de Introducción de la Disyunción.

Metateorema 4.6. $\vdash A \Leftrightarrow \phi \vdash A$.

Prueba: $\vdash A$

$\Leftrightarrow$ existe una demostración de A (Def. 4.3)

$\Leftrightarrow$ existe una tira finita de fórmulas, cada una de las cuales es o bien un axioma o bien una consecuencia de dos anteriores por *MP*, y la última es A (Def. 4.2)

$\Leftrightarrow$ existe una tira finita de fórmulas, cada una de las cuales es o bien un axioma o bien un miembro de ϕ o bien una consecuencia de dos anteriores por *MP*, y la última es A

$\Leftrightarrow$ existe una derivación de A a partir de ϕ (Def. 4.4)

$\Leftrightarrow \phi \vdash A$. (Def. 4.5) □

A continuación enunciaremos y probaremos un resultado llamado '*Metateorema de la Deducción*'. Afirma que si Γ es un conjunto cualquiera de fórmulas de *P* y tanto A como B son expresiones cualesquiera de aquel lenguaje, siempre que exista una derivación de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$, existirá una derivación de $(A \rightarrow B)$ a partir de Γ.

Necesitamos probar este enunciado para toda fórmula A, para toda fórmula B y para todo conjunto de fórmulas Γ de *P*. No nos es posible demostrarlo deteniéndonos en cada una de ellos, pues son infinitos. En consecuencia, deberemos recurrir al Principio de Inducción Matemática Completa. Éste es un teorema de los sistemas axiomáticos usuales elegidos para la aritmética, i.e. es una propiedad de los números naturales que afirma lo siguiente:

Definición 4.7. *Principio de Inducción Matemática Completa.* Si

1. 1 tiene la propiedad F (*paso base*), y
2. de suponer que todos los números naturales menores que m tienen la propiedad F se sigue que m también la tiene (*paso inductivo*),

entonces todos los números naturales tienen la propiedad F.

En otras palabras, el principio está dado por la siguiente afirmación condicional:

$$(\text{Si } 1 \text{ es } F \text{ y } (\text{si todo } m \text{ menor a } k \text{ es } F \Rightarrow k \text{ es } F)) \Rightarrow \text{todo } n \text{ es } F$$

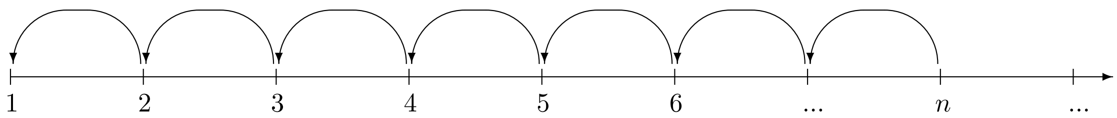
Un modo de comprender mejor este principio es en analogía con las fichas de un dominó, ubicadas una detrás de la otra como es usual. Resulta claro que si

1. se cae la primer ficha hacia delante, y

2. las fichas están ubicadas de tal modo que si han caído hacia delante todas las anteriores a una cualquiera y, en particular, la inmediatamente anterior, entonces ésta caerá hacia delante también (la distancia entre las fichas debe ser menor que la altura de aquellas),

entonces todas caerán.

Otro razonamiento interesante que ayuda a la comprensión del Principio de Inducción discurre del siguiente modo: supongamos que se cumplen las condiciones 1 y 2 del enunciado del Principio, el antecedente de la afirmación condicional. ¿Es posible que exista un número natural que no tenga la propiedad F? Supongamos que sí, y llamemos 'n' a ese número. Como sucede con todo número natural, n tiene un número finito de predecesores (n, en este caso), es decir, si nos situamos en una recta que representa a los números naturales, deberemos recorrer sólo un número finito de casillas hacia la izquierda para llegar al 1.



Como se cumple 1, 1 tiene la propiedad F. Como se cumple 2 y todos los números anteriores a 2 (1) tienen la propiedad, 2 también la tiene. Entonces todos los predecesores de 3 (1 y 2) tienen la propiedad F y, por 2 nuevamente, 3 tiene la propiedad también. Dado que entre 1 y n hay únicamente un número finito de números naturales, repitiendo este proceso un número finito de veces llegaremos a que todos los predecesores de n tienen la propiedad F y, en consecuencia, n también. Este razonamiento no constituye una demostración del Principio de Inducción sino más bien a la inversa: el principio que establece este hecho es el enunciado matemático que capta nuestra intuición de que el número de predecesores de un número natural es finito.

¿Por qué el Principio de Inducción Matemática Completa nos sirve ahora para demostrar el Metateorema de la Deducción? Porque hablar de números naturales puede ser útil para hablar de todos los elementos de un conjunto infinito. En este caso, debemos probar que para cada derivación de B a partir de $\Gamma \cup A$ existe una derivación de $(A \to B)$ a partir de Γ, esto es, debemos hablar de todas las derivaciones de una fórmula a partir de otras, y son infinitas. Un modo de hacerlo es a través de su longitud, *i.e.* del número de pasos de cada una de ellas, que por la

Definición 4.4 es un número natural. Las expresiones "para toda derivación de B a partir de $\Gamma \cup A$ existe una derivación de $(A \rightarrow B)$ a partir de Γ" y "para todo número natural n, si la derivación de B a partir de $\Gamma \cup A$ tiene n pasos entonces existe una derivación de $(A \rightarrow B)$ a partir de Γ" son equivalentes. Hablar de todas las derivaciones con un número natural cualquiera de longitud es hablar de todas las derivaciones *simpliciter* pues, por la Definición 4.4, una derivación en *SP* sólo puede tener un número natural (finito) de pasos.

Consecuentemente, si probamos que "para todo número natural n, si la derivación de B a partir de $\Gamma \cup A$ tiene n pasos entonces existe una derivación de $(A \rightarrow B)$ a partir de Γ", habremos probado el Metateorema de la Deducción. Y podemos hacerlo utilizando el Principio de Inducción Matemática Completa. En primer lugar, debemos demostrar 1, que la propiedad se cumple para el número 1, es decir, para cualquier derivación de 1 paso de longitud. Y luego 2, que, de cumplirse esta propiedad para cualquier derivación de longitud menor a un número natural arbitrario k, también se cumplirá para toda derivación de longitud k. Así, contaremos con el antecedente del Principio de Inducción y podremos, por ende, afirmar su consecuente: la propiedad se cumple para cualquier derivación de cualquier longitud finita, *i.e.* para toda derivación.

Metateorema 4.7. METATEOREMA DE LA DEDUCCIÓN. Si $\Gamma \cup \{A\} \vdash B \Rightarrow \Gamma \vdash (A \rightarrow B)$.

Prueba: Procederemos pues aplicando el Principio de Inducción Matemática Completa sobre el número n de pasos que tiene la derivación de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$. Cualquiera sea n, mostraremos que existe una derivación de $(A \rightarrow B)$ a partir de Γ.

- **Paso base:** Queremos ver que el metateorema vale para derivaciones de largo $n = 1$, *i.e.* que si existe una derivación de 1 paso de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$ entonces existe una derivación de $(A \rightarrow B)$ a partir de Γ.

  Si la derivación de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$ consiste de un único paso, éste está constituido por B. Entonces B debe ser, o bien un axioma de *SP*, o bien un miembro de Γ, o bien A. Consideremos cada uno de estos tres casos:

  - *Caso 1.* B es un axioma de *SP*. Luego, la siguiente es una derivación de $(A \rightarrow B)$ a partir de Γ:

    1. B — Axioma de *SP*, por hipótesis
    2. $(B \rightarrow (A \rightarrow B))$ — Axioma, por SP_1
    3. $(A \rightarrow B)$ — *MP* 1, 2

- *Caso 2.* $B \in \Gamma$. Luego, la siguiente es una derivación de $(A \to B)$ a partir de Γ:

  1. B — Miembro de Γ, por hipótesis
  2. $(B \to (A \to B))$ — Axioma, por SP_1
  3. $(A \to B)$ — *MP* 1, 2

- *Caso 3.* $A \equiv B$. Por lo tanto, $(A \to B) \equiv (A \to A)$. Luego, la siguiente es una derivación de $(A \to B)$ a partir de Γ:

  1. $(A \to ((A \to A) \to A))$ — Axioma, por SP_1
  2. $((A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A)))$ Axioma, por SP_2
  3. $((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$ — *MP* 1, 2
  4. $(A \to (A \to A))$ — Axioma, por SP_1
  5. $(A \to A)$ — *MP* 3, 4

- **Paso inductivo:** Queremos ver que si el metateorema vale para derivaciones de largo menor a un número natural arbitrario, k, también vale para k; queremos probar el *condicional* que hace las veces de segundo conyunto en el antecedente del Principio de Inducción. Luego, partiremos del antecedente de este condicional, la ***hipótesis inductiva***, y trataremos de llegar a consecuente, la ***tesis inductiva***:

  Hipótesis inductiva: Si existe una derivación de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$ en un número de pasos menor a $k \Rightarrow \Gamma \vdash (A \to B)$.

  Tesis inductiva: Si existe una derivación de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$ en un número k de pasos $\Rightarrow \Gamma \vdash (A \to B)$.

  Prueba: Suponiendo que existe una derivación de B a partir de $\Gamma \cup A$ de longitud k, queremos probar que existe también una derivación de $(A \to B)$ a partir de Γ. Existen ahora cuatro posibilidades: o bien B es un axioma, o bien un miembro de Γ, o bien es la misma fórmula A, o bien B se obtiene como consecuencia de dos fórmulas anteriores en la derivación, por *MP*. Los tres primeros son idénticos a los del paso base y no hay necesidad de repetirlos aquí. Consideremos entonces el cuarto caso:

  - *Caso 4.* B es una consecuencia por *MP* de dos fórmulas anteriores, C_i y C_j, donde i y j indican el lugar que estas fórmulas ocupan en la derivación de B a partir de $\Gamma \cup A$ y, por ende, $i < k$ y $j < k$. Luego, una de ellas debe tener forma condicional, tal que su antecedente está constituido por la otra y su consecuente por B. Sin perdida de generalidad diremos que $C_i \equiv (C_j \to B)$. Entonces, $\Gamma \cup A \vdash$

$(C_j \to B)$ y $\Gamma \cup A \vdash C_j$. Como $i < k$ y $j < k$, por hipótesis inductiva tenemos que $\Gamma \vdash (A \to (C_j \to B))$ y $\Gamma \vdash (A \to C_j)$. La siguiente es una derivación de $(A \to B)$ a partir de Γ:

1. $(A \to (C_j \to B))$
2. $(A \to C_j)$
3. $((A \to (C_j \to B)) \to ((A \to C_j) \to (A \to B)))$ Axioma, por SP_2
4. $((A \to C_j) \to (A \to B))$ *MP* 1, 3
5. $(A \to B)$ *MP* 2, 4

Luego, por el Principio de Inducción Matemática Completa, tenemos que, para cualquier natural n, si existe una derivación de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$ en n pasos, entonces $(A \to B)$ es derivable de Γ o, lo que es lo mismo, si $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, entonces $\Gamma \vdash (A \to B)$. □

El Metateorema de la Deducción resulta sumamente útil a la hora de hacer demostraciones y derivaciones en *SP*. Si el objetivo es derivar una fórmula condicional $(A \to B)$ a partir de un conjunto de expresiones Γ (que bien puede ser vacío, en cuyo caso estaremos también frente una demostración), el Metateorema de la Deducción nos permite tener a A como premisa, esto es, mostrar primero que $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ y luego, aplicando el metateorema, tenemos que $\Gamma \vdash (A \to B)$.

Para probar la utilidad de aumentar el número de premisas, veamos el siguiente ejemplo. Ilustrando la noción de demostración introducida mediante la Definición 4.2, hemos demostrado la fórmula $(p' \to p')$, esto es, que $\vdash (p' \to p')$, y nos ha tomado 5 pasos. Veamos cómo, aplicando el Metateorema de la Deducción, ahorramos en tiempo y en complejidad. Primero demostramos que $\phi \cup \{p'\} \vdash p'$:

1. p' Miembro de $\phi \cup \{p'\}$

Y luego aplicamos el Metateorema de la Deducción, obteniendo que $\phi \vdash (p' \to p')$, que por el Metateorema 4.6 implica que $\vdash (p' \to p')$.

La dirección contraria del metateorema es también verdadera y, por lo tanto, el siguiente enunciado es un asimismo metateorema.

Metateorema 4.8. $\Gamma \cup \{A\} \vdash B \Leftrightarrow \Gamma \vdash (A \to B)$.

Prueba:

$\Rightarrow$) En virtud del Metateorema de la Deducción, $\Gamma \cup \{A\} \vdash B \Rightarrow \Gamma \vdash (A \rightarrow B)$.[5]

$\Leftarrow$) Si $\Gamma \vdash (A \rightarrow B)$

$\Rightarrow$ existe una derivación de $(A \rightarrow B)$ a partir de Γ (Def. 4.5)

$\Rightarrow$ existe una tira finita de fórmulas, $A_1, ..., A_n, (A \rightarrow B)$, cada una de las cuales es o bien un axioma, o bien un miembro de Γ o bien una consecuencia por *MP* de dos fórmulas anteriores (Def. 4.4)

$\Rightarrow$ la tira $A_1, ..., A_n, (A \rightarrow B), A, B$ es (i) finita, pues tiene únicamente dos pasos más que $A_1, ..., A_n, (A \rightarrow B)$, que era finita; (ii) cada una de las cuales es o bien un axioma o bien un miembro de $\Gamma \cup \{A\}$, o bien una consecuencia de dos fórmulas anteriores por *MP*, pues $A_1, ..., A_n, (A \rightarrow B)$ cumple estos requisitos, A es un miembro de $\Gamma \cup \{A\}$ y B se obtiene por *MP* a partir de A y de $(A \rightarrow B)$, que son anteriores; (iii) y la última expresión de la tira es B

$\Rightarrow$ existe una derivación de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$ (Def. 4.4)

$\Rightarrow \Gamma \cup \{A\} \vdash B$. (Def. 4.5)

$\square$

Hasta aquí sólo hemos hablado de conjuntos o fórmulas consistentes o inconsistentes. A continuación trabajaremos sobre la noción de *aparato deductivo consistente e inconsistente*.

Definición 4.8. Un aparato deductivo es *simplemente consistente* si y sólo si no existe una fórmula A tal que tanto ella como su negación son teoremas en dicho aparato. En cambio, un aparato deductivo es *simplemente inconsistente* si sucede lo contrario.

Evidentemente, sólo tiene sentido hablar de la consistencia simple de un sistema cuando el lenguaje en el cual está expresado contiene un símbolo en cuya interpretación pretendida se comporte como la negación. Por ello, ofreceremos una definición alternativa de consistencia, aplicable dentro de cualquier aparato deductivo, contenga o no un símbolo para la negación.

[5]Escribimos '$\Rightarrow$)' para indicar que lo que sigue es la demostración de la dirección que va de izquierda a derecha del bicondicional que aparece en el enunciado a probar; en este caso, el Metateorema 4.8. Análogamente, escribimos '$\Leftarrow$)' para señalar que lo que se dice a continuación es la prueba de la dirección contraria del enunciado relevante. Juntas, ambas pruebas son suficientes para establecer la verdad de la afirmación bicondicional.

Definición 4.9. Un aparato deductivo es *absolutamente consistente* si y sólo si existe al menos una fórmula del lenguaje en el cual dicho sistema está formulado que no es un teorema en él. Al contrario, es *absolutamente inconsistente* si toda expresión de ese lenguaje es un teorema suyo.

Puesto que *SP* contiene un símbolo cuya interpretación pretendida es la negación, '¬', las nociones de consistencia simple y consistencia absoluta coinciden para nuestro aparato deductivo.

Metateorema 4.9. *SP* es simplemente inconsistente ⇔ *SP* es absolutamente inconsistente.[6]

Prueba: Probaremos las dos direcciones de este enunciado separadamente.

⇒) Si *SP* es simplemente inconsistente

⇒ existe una fórmula A de *P* tal que $\vdash A$ y $\vdash \neg A$. (Def. 4.8)

Para cualesquiera fórmulas C y D de *P*, $\vdash (\neg C \rightarrow (C \rightarrow D))$, pues la siguiente tira de expresiones es una demostración:

1. $((\neg D \rightarrow \neg C) \rightarrow (C \rightarrow D))$ Axioma, por SP_3
2. $(((\neg D \rightarrow \neg C) \rightarrow (C \rightarrow D)) \rightarrow (\neg C \rightarrow ((\neg D \rightarrow \neg C) \rightarrow (C \rightarrow D))))$ Axioma, por SP_1
3. $(\neg C \rightarrow ((\neg D \rightarrow \neg C) \rightarrow (C \rightarrow D)))$ *MP* 1, 2
4. $((\neg C \rightarrow ((\neg D \rightarrow \neg C) \rightarrow (C \rightarrow D))) \rightarrow ((\neg C \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg C)) \rightarrow (\neg C \rightarrow (C \rightarrow D))))$ Axioma, por SP_2
5. $((\neg C \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg C)) \rightarrow (\neg C \rightarrow (C \rightarrow D)))$ *MP* 3, 4
6. $(\neg C \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg C))$ Axioma, por SP_1
7. $(\neg C \rightarrow (C \rightarrow D))$ *MP* 6, 5

⇒ $\vdash (\neg A \rightarrow (A \rightarrow B))$, donde B es cualquier fórmula de *P*. Como $\vdash \neg A$, por *MP*, $\vdash (A \rightarrow B)$. Y dado que $\vdash A$, nuevamente por *MP*, $\vdash B$, esto es, *SP* tiene como teorema cualquier fórmula B de *P*

⇒ *SP* absolutamente inconsistente. (Def. 4.9)

⇐) Si *SP* es absolutamente inconsistente

⇒ para toda fórmula B, $\vdash B$ (Def. 4.9)

⇒ para alguna fórmula A, $\vdash A$ y $\vdash \neg A$

⇒ *SP* es simplemente inconsistente. (Def. 4.8)

[6] Este enunciado es equivalente al que establece que la consistencia simple y la consistencia absoluta coinciden para *SP*. Basta con ver que si, cada vez que *SP* es simplemente inconsistente también lo es absolutamente y viceversa, también será el caso de que, si *SP no* es simplemente inconsistente, tampoco lo será absolutamente, y viceversa. No obstante, optamos por probar el primer enunciado en lugar de aquél por cuestiones de simplicidad.

□

A continuación probaremos que *SP* es simplemente consistente (y, por tanto, absolutamente consistente también, debido al Metateorema 4.9). Lo haremos utilizando conceptos provenientes de la Teoría de Modelos presentados en el Capítulo 3.

Estrategia general de la prueba:

(1) Mostraremos que todos los axiomas de *SP* son lógicamente válidos.

(2) Probaremos que el *MP* preserva la validez lógica.

(3) Mostraremos pues que todos los teoremas de *SP* son lógicamente válidos:

- Utilizaremos la validez lógica de los axiomas de *SP* y la preservación de verdad de su única regla de derivación para demostrar que todos los teoremas de *SP* son lógicamente válidos. Cada teorema de *SP* lo es en virtud de la existencia de una demostración, *i.e.* de una tira finita de fórmulas en la que dicho teorema es la última y cumple con ciertos requisitos. Luego, si probamos que la última expresión de toda demostración es lógicamente válida, habremos probado que todo teorema de *SP* lo es. En lugar de mostrar este resultado *simpliciter*, probaremos el siguiente enunciado equivalente (recordemos que toda demostración tiene un número natural de pasos) vía el Principio de Inducción Matemática Completa, presentado en la Definición 4.7: para todo número natural n, si el número de pasos de la demostración de un teorema A es n, entonces A es lógicamente válido.

(4) Concluiremos que por ser todos sus teoremas tautológicos, *SP* no puede ser simplemente inconsistente. Pues, si lo fuera, existiría una tautología tal que su negación también es lógicamente verdadera, lo cual es imposible, en vista de la cláusula 1 de la Definición 3.1 y de la Definición 3.4.

Paso a paso:

(1) **Metateorema 4.10.** Los axiomas de *SP* son lógicamente válidos.

Prueba: Sin importar la complejidad de las fórmulas que se usen para reemplazar las letras esquemáticas A, B y C en los esquemas de axioma, las valuaciones, en virtud de la Definición 3.1, asignarán o bien 1 o bien 0 a cada una de ellas; y pueden, por tanto, agruparse de acuerdo con las siguientes ocho posibilidades:

1. $V(A) = 1$, $V(B) = 1$ y $V(C) = 1$.
2. $V(A) = 1$, $V(B) = 1$ y $V(C) = 0$.
3. $V(A) = 1$, $V(B) = 0$ y $V(C) = 1$.
4. $V(A) = 1$, $V(B) = 0$ y $V(C) = 0$.
5. $V(A) = 0$, $V(B) = 1$ y $V(C) = 1$.
6. $V(A) = 0$, $V(B) = 1$ y $V(C) = 0$.
7. $V(A) = 0$, $V(B) = 0$ y $V(C) = 1$.
8. $V(A) = 0$, $V(B) = 0$ y $V(C) = 0$.

Escribiendo cada una de estas posibilidades en una fila de la tabla, probaremos que en todas ellas los axiomas de *SP* son verdaderos, basándonos en las cláusulas 1 y 2 de la Definición 3.1:

SP_1	$(A$	$\to$	$(B$	$\to$	$A))$
1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1
3	1	1	0	1	1
4	1	1	0	1	1
5	0	1	1	0	0
6	0	1	1	0	0
7	0	1	0	1	0
8	0	1	0	1	0

SP_2	$((A$	$\to$	$(B$	$\to$	$C))$	$\to$	$((A$	$\to$	$B)$	$\to$	$(A$	$\to$	$C)))$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0
3	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
4	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0
5	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0
7	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1
8	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

SP_3	$((\neg$	A	$\rightarrow$	$\neg$	$B)$	$\rightarrow$	$(B$	$\rightarrow$	$A))$
1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
2	0	1	1	0	1	1	1	1	1
3	0	1	1	1	0	1	0	1	1
4	0	1	1	1	0	1	0	1	1
5	1	0	0	0	1	1	1	0	0
6	1	0	0	0	1	1	1	0	0
7	1	0	1	1	0	1	0	1	0
8	1	0	1	1	0	1	0	1	0

Luego, en toda valuación, los axiomas de *SP* son verdaderos y, por la Definción 3.4, sabemos que son lógicamente válidos. □

(2) Además, sabemos que el *MP* preserva la validez lógica de premisas a conclusión, en virtud del Metateorema 3.2, que establece precisamente eso.

(3) **Metateorema 4.11.** Para todo número natural n, el enunciado demostrado en una demostración de longitud n es una fórmula lógicamente válida.

- **Paso base:** Queremos ver que el metateorema vale para demostraciones de largo $n = 1$, ***i.e.*** que si una demostración de una fórmula A tiene un solo paso, entonces A es tautológica.

  Si la demostración de una expresión A tiene un único paso, por la Definición 4.2, sabemos que ese único paso está constituido por A y que debe ser un axioma de *SP*. El Metateorema 4.10 indica que todo axioma de este sistema es lógicamente válido. Luego, $\vDash A$.

- **Paso inductivo:** Queremos ver que si el metateorema vale para derivaciones de largo menor a un número natural arbitrario, k, también vale para k. Luego, tenemos:

  Hipótesis inductiva: Un enunciado demostrado en una demostración de longitud menor a k es una fórmula lógicamente válida.

  Tesis inductiva: Un enunciado demostrado en una demostración de longitud k es una fórmula lógicamente válida.

  Prueba: Sea A un enunciado demostrado mediante una demostración con exactamente k pasos. Luego, por la Definición 4.2, existe una tira finita de fórmulas, cada una de las cuales es o bien un axioma de *SP* o bien una consecuencia inmediata de dos expresiones anteriores por *MP*, y la última fórmula de la tira es A. Por ende, tenemos dos casos posibles:

- *Caso 1.* A es un axioma de *SP*. Luego, por el Metateorema 4.10, sabemos que $\models A$.
- *Caso 2.* A es una consecuencia de dos fórmulas anteriores en la tira por *MP*. Luego, existen dos fórmulas anteriores a A, B_i y B_j, donde i y j indican el lugar que estas expresiones ocupan en la demostración y, por ende, $i < k$ y $j < k$. Luego, una de ellas, debe tener forma condicional, tal que su antecedente está constituido por la otra y su consecuente por A. Sin pérdida de generalidad, diremos que $B_i \equiv (B_j \rightarrow A)$. Puesto que tanto B_i como B_j aparecen en la demostración de A, podemos remover todos los pasos subsiguientes a cada una de ellas en esta demostración y obtener demostraciones de longitud i y j, respectivamente, esto es, menor a k, de cada una de estas expresiones. Luego, por hipótesis inductiva, tanto $\models (B_j \rightarrow A)$ como $\models B_j$ y, por el Metateorema 3.2, $\models A$.

En consecuencia, por el Principio de Inducción Matemática Completa presentado en la Definición 4.7, para todo n natural, si n es el número de pasos en los cuales demostramos una fórmula A en *SP*, A es lógicamente verdadera. O bien, todos los teoremas de *SP* son lógicamente verdaderos. □

(4) **Metateorema 4.12.** Consistencia Simple de *SP*. *SP* es simplemente consistente.

Prueba: Supongamos, por absurdo, que *SP* es simplemente inconsistente

$\Rightarrow$ existe una fórmula A de P tal que $\vdash A$ y $\vdash \neg A$ (Def. 4.8)

$\Rightarrow \models A$ y $\models \neg A$ (Met. 4.11)

$\Rightarrow$ para toda valuación V, $V(A) = 1$ y $V(\neg A) = 1$. (Def. 3.4)

$\Rightarrow$ para toda valuación V, $V(A) = 1$ y $V(A) = 0$. (Def. 3.1, 1)

Hemos llegado a un absurdo, que partió de suponer que *SP* es simplemente inconsistente. Luego, *SP* es simplemente consistente.[7] □

Ejercicios

[7] Por la regla de Introducción de la Negación.

Ejercicio 4.1. Demuestre que para cualesquiera fórmulas A, B y C y para cualquier conjunto de fórmulas Γ:[8]

1. $\{(A \rightarrow B), (B \rightarrow C)\} \vdash (A \rightarrow C)$.
2. $\vdash (A \rightarrow B)$ y $\vdash (B \rightarrow C) \Rightarrow \vdash (A \rightarrow C)$.
3. $\{A, B\} \vdash C$ y $\{A, C\} \vdash D \Rightarrow \{A, B\} \vdash D$.
4. $\vdash (A \rightarrow A)$.
5. $\vdash (\neg\neg A \rightarrow A)$.
6. $\vdash (A \rightarrow \neg\neg A)$.
7. $\{(A \rightarrow B), \neg\neg A)\} \vdash \neg\neg B$.
8. $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B))$.
9. $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A))$.
10. $\vdash ((\neg A \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow A))$.
11. $\vdash ((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A)$.
12. $\vdash (A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B)))$.
13. $\vdash ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A))$.
14. $\vdash ((A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A)$.
15. $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A))$.
16. $\vdash ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A))$.
17. Si $A \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \vdash A$.

[8] Los ejercicios de este capítulo, que consisten mayormente en mostrar que ciertas fórmulas de *P* son teoremas o consecuencias sintácticas de otras, están formulados en términos metalingüísticos, en lugar de en términos de expresiones de *P*. Por ejemplo, en el Ejercicio 4.1.5, se pide probar que $(\neg\neg A \rightarrow A)$ es un teorema para cualquier reemplazo de la metaletra esquemática A por una expresión de *P*, en lugar de pedirlo para una fórmula de *P* específica, como p' (en cuyo caso deberíamos probar que $(\neg\neg p' \rightarrow p')$ es un teorema). La ventaja de este modo de proceder es que, cuando demostramos los enunciados que se piden en los ejercicios, habremos probado una infinidad de teoremas o relaciones de consecuencia sintáctica de *SP*, en lugar de una única en cada caso; lo cual será de gran utilidad a lo largo de los mismos ejercicios y también más adelante.

Ejercicio 4.2. Demuestre que, para cualesquiera fórmulas de P A, B y C valen las siguientes relaciones de consecuencia sintáctica:

1. $\{A, B\} \vdash \neg(A \rightarrow \neg B)$.
2. $\neg(A \rightarrow \neg B) \vdash A$.
3. $\neg(A \rightarrow \neg B) \vdash B$.
4. $A \vdash (\neg A \rightarrow B)$.
5. $B \vdash (\neg A \rightarrow B)$.
6. $\{(\neg A \rightarrow B), (A \rightarrow C), (B \rightarrow C)\} \vdash C$.
7. $\{A, \neg A\} \vdash \neg(B \rightarrow B)$.
8. $\{A, \neg A\} \vdash B$.
9. Si $A \vdash \neg(B \rightarrow B) \Rightarrow \vdash \neg A$.
10. $\neg\neg A \vdash A$.

Soluciones

Ejercicio 4.1.

1. La siguiente es una derivación de $(A \rightarrow C)$ a partir de $\{(A \rightarrow B), (B \rightarrow C)\}$:

1. $(A \rightarrow B)$	Miembro de $\{(A \rightarrow B), (B \rightarrow C)\}$
2. $(B \rightarrow C)$	Miembro de $\{(A \rightarrow B), (B \rightarrow C)\}$
3. $((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$	Axioma, por SP_2
4. $((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)))$	Axioma, por SP_1
5. $(A \rightarrow (B \rightarrow C))$	*MP* 2, 4
6. $((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$	*MP* 3, 5
7. $(A \rightarrow C)$	*MP* 1, 6

$\square$

2. La siguiente es una demostración de $(A \to C)$, suponiendo que tanto $(A \to B)$ como $(B \to C)$ son teoremas de *SP*:

1. $(A \to B)$	Teorema[9]
2. $(B \to C)$	Teorema
3. $((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$	Axioma, por SP_2
4. $((B \to C) \to (A \to (B \to C)))$	Axioma, por SP_1
5. $(A \to (B \to C))$	*MP* 2, 4
6. $((A \to B) \to (A \to C))$	*MP* 3, 5
7. $(A \to C)$	*MP* 1, 6

□

3. Si $\{A, B\} \vdash C$ y $\{A, C\} \vdash D$

$\Rightarrow$ existe una derivación de C a partir de $\{A, B\}$ y otra de D a partir de $\{A, C\}$ (Def. 4.5)

$\Rightarrow$ existe una tira finita de fórmulas, $A, B, A_1, ..., A_n, C$, cada una de las cuales es o bien un axioma, o bien un miembro de $\{A, B\}$ o bien una consecuencia por *MP* de dos fórmulas anteriores; y otra tira, $A, C, B_1, ..., B_m, D$, cada una de las cuales es o bien un axioma, o bien un miembro de $\{A, C\}$ o bien una consecuencia por *MP* de dos fórmulas anteriores (Def. 4.4)

$\Rightarrow$ la tira $A, B, A_1, ..., A_n, C, B_1, ..., B_m, D$ es (i) finita, pues el número de sus pasos resulta de restar dos a la suma de los de $A, B, A_1, ..., A_n, C$ y los de $A, C, B_1, ..., B_m, D$, que son finitos; (ii) cada una sus fórmulas es o bien un axioma, o bien un miembro de $\{A, B\}$, o bien una consecuencia de dos fórmulas anteriores por *MP*, pues $A, B, A_1, ..., A_n, C$, cumple estos requisitos y $B_1, ..., B_m, D$ son o bien axiomas, o bien miembros de $\{A\}$ y, por tanto, de $\{A, B\}$, o bien C, que es una consecuencia por *MP* de dos expresiones anteriores, o bien una consecuencia por *MP* de dos expresiones anteriores; y (iii) la última expresión de la tira es D

$\Rightarrow$ existe una derivación de D a partir de $\{A, B\}$ (Def. 4.4)

$\Rightarrow \{A, B\} \vdash D$. (Def. 4.5)

□

[9] Como anticipamos, emplearemos enunciados que sabemos que son teoremas como si fueran axiomas. Trabajaremos pues con demostraciones o derivaciones abreviadas, que son susceptibles de ser expandidas hacia demostraciones y derivaciones propiamente dichas; razón por la cual no hay inconvenientes en trabajar con ellas.

4. La siguiente es una derivación de A a partir de $\{A\}$:

1. A Miembro de $\{A\}$

$\Rightarrow \{A\} \vdash A$ (Def. 4.5)

$\Rightarrow \vdash (A \to A)$. (Deducción)[10] □

5. La siguiente es una demostración de $(\neg\neg A \to A)$:

1. $(\neg\neg A \to (\neg A \to \neg\neg\neg A))$ Teorema (ver prueba del Met. 4.9)
2. $((\neg A \to \neg\neg\neg A) \to (\neg\neg A \to A))$ Axioma, por $SP3$
3. $(\neg\neg A \to (\neg\neg A \to A)$ Ejercicio 4.1.2,1, 2
4. $((\neg\neg A \to (\neg\neg A \to A) \to ((\neg\neg A \to \neg\neg A) \to (\neg\neg A \to A)))$ Axioma, por SP_2
5. $((\neg\neg A \to \neg\neg A) \to (\neg\neg A \to A))$ *MP* 3, 4
6. $(\neg\neg A \to \neg\neg A)$ Ejercicio 4.1.4
7. $(\neg\neg A \to A)$ *MP* 5, 6

□

6. La siguiente es una demostración de $(A \to \neg\neg A)$:

1. $(\neg\neg\neg A \to \neg A)$ Ejercicio 4.1.5
2. $((\neg\neg\neg A \to \neg A) \to (A \to \neg\neg A))$ Axioma, por $SP3$
3. $(A \to \neg\neg A)$ *MP* 1, 2

□

7. La siguiente es una derivación de $\neg\neg B$ a partir de $\{(A \to B), \neg\neg A)\}$:

1. $(A \to B)$ Miembro de $\{(A \to B), \neg\neg A)\}$
2. $\neg\neg A$ Miembro de $\{(A \to B), \neg\neg A)\}$
3. $(\neg\neg A \to A)$ Ejercicio 4.1.5
4. A *MP* 2, 3
5. B *MP* 1, 4
6. $(B \to \neg\neg B)$ Ejercicio 4.1.6
7. $\neg\neg B$ *MP* 5, 6

□

[10] Estrictamente hablando, deberíamos escribir: $\{A\} \vdash A \Rightarrow \phi \cup \{A\} \vdash A \Rightarrow \phi \vdash (A \to A)$ (por Deducción) $\Rightarrow \vdash (A \to A)$ (por Metateorema 4.6). Estos pasos son necesarios para aplicar correctamente el Metateorema de la Deducción en '$\{A\} \vdash A$'. Sin embargo, los omitiremos, también en casos semejantes, para dar inteligibilidad a nuestras pruebas.

8. $\{(A \to B), \neg\neg A)\} \vdash \neg\neg B$ (Ejer. 4.1.7)
$\Rightarrow \{(A \to B)\} \vdash (\neg\neg A \to \neg\neg B)$ (Deducción)
$\Rightarrow \vdash ((A \to B) \to (\neg\neg A \to \neg\neg B))$. (Deducción)

$\square$

9. La siguiente es una demostración de $((A \to B) \to (\neg B \to \neg A))$:
1. $((A \to B) \to (\neg\neg A \to \neg\neg B))$ Ejercicio 4.1.8.
2. $((\neg\neg A \to \neg\neg B) \to (\neg B \to \neg A))$ Axioma, por $SP3$
3. $((A \to B) \to (\neg B \to \neg A))$ Ejercicio 4.1.2, 1, 2

$\square$

10. La siguiente es una demostración de $((\neg A \to A) \to (B \to A))$:
1. $(\neg A \to (A \to \neg B))$ Teorema (ver prueba del Met. 4.9)
2. $((\neg A \to (A \to \neg B)) \to ((\neg A \to A) \to (\neg A \to \neg B)))$ Axioma, por $SP2$
3. $((\neg A \to A) \to (\neg A \to \neg B))$ *MP* 1, 2
4. $((\neg A \to \neg B) \to (B \to A))$ Axioma, por $SP3$
5. $((\neg A \to A) \to (B \to A))$ Ejercicio 4.1.2, 3, 4

$\square$

11. La siguiente es una demostración de $((\neg A \to A) \to A)$:
1. $((\neg A \to A) \to ((\neg A \to A) \to A))$ Ejercicio 4.1.10
2. $(((\neg A \to A) \to ((\neg A \to A) \to A)) \to ((\neg A \to A) \to (\neg A \to A)) \to ((\neg A \to A) \to A)))$ Axioma, por $SP2$
3. $((\neg A \to A) \to (\neg A \to A)) \to ((\neg A \to A) \to A))$ *MP* 1, 2
4. $((\neg A \to A) \to (\neg A \to A))$ Ejercicio 4.1.4
5. $((\neg A \to A) \to A)$ *MP* 3, 4

$\square$

12. $\{A, (A \to B)\} \vdash B$ *MP*
$\Rightarrow \{A\} \vdash ((A \to B) \to B)$ (Deducción)
$\Rightarrow \vdash (A \to ((A \to B) \to B))$ (Deducción)
La siguiente es una demostración de $(A \to (\neg B \to \neg(A \to B)))$:
1. $(A \to ((A \to B) \to B))$ Teorema
2. $(((A \to B) \to B) \to (\neg B \to \neg(A \to B)))$ Ejercicio 4.1.9

3. $(A \to (\neg B \to \neg(A \to B)))$ Ejercicio 4.1.2, 1, 2

$\square$

13. La siguiente es una derivación de $(B \to \neg A)$ a partir de $\{(\neg\neg A \to A), (A \to \neg B)\}$:

1. $(\neg\neg A \to A)$ Miembro de $\{(\neg\neg A \to A), (A \to \neg B)\}$

2. $(A \to \neg B)$ Miembro de $\{(\neg\neg A \to A), (A \to \neg B)\}$

3. $(\neg\neg A \to \neg B)$ Ejercicio 4.1.1, 1, 2

4. $((\neg\neg A \to \neg B) \to (B \to \neg A))$ Axioma, por $SP3$

5. $(B \to \neg A)$ *MP* 3, 4

$\Rightarrow \{(\neg\neg A \to A), (A \to \neg B)\} \vdash (B \to \neg A)$

$\Rightarrow \{(\neg\neg A \to A)\} \vdash ((A \to \neg B) \to (B \to \neg A))$ (Deducción)

$\Rightarrow \vdash ((\neg\neg A \to A) \to ((A \to \neg B) \to (B \to \neg A)))$ (Deducción)

Además, por el Ejercicio 4.1.5, $\vdash (\neg\neg A \to A)$ y, por *MP*, $\vdash ((A \to \neg B) \to (B \to \neg A))$. $\square$

14. $\{((A \to \neg A) \to (\neg\neg A \to \neg A)), ((\neg\neg A \to \neg A) \to \neg A)\} \vdash ((A \to \neg A) \to \neg A)$ (Ejer. 4.1.1)

$\Rightarrow \{((\neg\neg A \to \neg A) \to \neg A)\} \vdash (((A \to \neg A) \to (\neg\neg A \to \neg A)) \to ((A \to \neg A) \to \neg A))$ (Deducción)

$\Rightarrow \vdash (((\neg\neg A \to \neg A) \to \neg A) \to (((A \to \neg A) \to (\neg\neg A \to \neg A)) \to ((A \to \neg A) \to \neg A)))$ (Deducción)

La siguiente es una demostración de $((A \to \neg A) \to \neg A)$:

1. $(((\neg\neg A \to \neg A) \to \neg A) \to (((A \to \neg A) \to (\neg\neg A \to \neg A)) \to ((A \to \neg A) \to \neg A)))$ Teorema

2. $((A \to \neg A) \to (\neg\neg A \to \neg A))$ Ejercicio 4.1.9

3. $((\neg\neg A \to \neg A) \to \neg A)$ Ejercicio 4.1.11

4. $(((A \to \neg A) \to (\neg\neg A \to \neg A)) \to ((A \to \neg A) \to \neg A))$ *MP* 1, 3

5. $((A \to \neg A) \to \neg A)$ *MP* 2, 4

$\square$

15. La siguiente es una derivación de $\neg A$ a partir de $\{(A \to B), (A \to \neg B)\}$:

1. $(A \to B)$ Miembro de $\{(A \to B), (A \to \neg B)\}$

2. $(A \to \neg B)$ Miembro de $\{(A \to B), (A \to \neg B)\}$

3. $((A \to \neg B) \to (B \to \neg A))$ Ejercicio 4.1.13
4. $(B \to \neg A)$ *MP* 2, 3
5. $(A \to \neg A)$ Ejercicio 4.1.1, 1, 4
6. $((A \to \neg A) \to \neg A)$ Ejercicio 4.1.14
7. $\neg A$ *MP* 5, 6
$\Rightarrow \{(A \to B), (A \to \neg B)\} \vdash \neg A$
$\Rightarrow \{(A \to B)\} \vdash ((A \to \neg B) \to \neg A)$ (Deducción)
$\Rightarrow \vdash ((A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A))$. (Deducción) □

16. La siguiente es una derivación de A a partir de $\{(\neg A \to B), (\neg A \to \neg B)\}$:
1. $((\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to \neg\neg A))$ Ejercicio 4.1.15[11]
2. $(\neg A \to B)$ Miembro de $\{(\neg A \to B), (\neg A \to \neg B)\}$
3. $(\neg A \to \neg B)$ Miembro de $\{(\neg A \to B), (\neg A \to \neg B)\}$
4. $((\neg A \to \neg B) \to \neg\neg A)$ *MP* 1, 2
5. $\neg\neg A$ *MP* 3, 4
6. $(\neg\neg A \to A)$ Ejercicio 4.1.5
7. A *MP* 5, 6
$\Rightarrow \{(\neg A \to B), (\neg A \to \neg B)\} \vdash A$
$\Rightarrow \{(\neg A \to B)\} \vdash ((\neg A \to \neg B) \to A)$ (Deducción)
$\Rightarrow \vdash ((\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A))$. (Deducción) □

17. Supongamos que $A \in \Gamma$.
La siguiente es una derivación de A a partir de Γ:
1. A Miembro de Γ
$\Rightarrow \Gamma \vdash A$. □

Ejercicio 4.2.

1. La siguiente es una derivación de $\neg(A \to \neg B)$ a partir de $\{A, B\}$:
1. A Miembro de $\{A, B\}$
2. B Miembro de $\{A, B\}$

[11] Puesto que el teorema del Ejercicio 4.1.15 fue probado para cualesquiera fórmulas A y B de P, aquí lo aplicamos a las fórmulas $\neg A$ y B, respectivamente.

3. $(B \to \neg\neg B)$ Ejercicio 4.1.6
4. $(A \to (\neg\neg B \to \neg(A \to \neg B)))$ Ejercicio 4.1.12
5. $\neg\neg B$ *MP* 2, 3
6. $(\neg\neg B \to \neg(A \to \neg B))$ *MP* 1, 4
7. $\neg(A \to \neg B)$ *MP* 5, 6

$\square$

2. La siguiente es una derivación de A a partir de $\{\neg(A \to \neg B)\}$:
   1. $\neg(A \to \neg B)$ Miembro de $\{\neg(A \to \neg B)\}$
   2. $(\neg A \to (A \to \neg B))$ Teorema (ver prueba del Met. 4.9)
   3. $((A \to \neg B) \to \neg\neg(A \to \neg B))$ Ejercicio 4.1.6
   4. $(\neg A \to \neg\neg(A \to \neg B))$ Ejercicio 4.1.1, 2, 3
   5. $((\neg A \to \neg\neg(A \to \neg B)) \to (\neg(A \to \neg B) \to A))$ Axioma, por SP_3
   6. $(\neg(A \to \neg B) \to A)$ *MP* 4, 5
   7. A *MP* 1, 6

   $\square$

3. La siguiente es una derivación de B a partir de $\{\neg(A \to \neg B)\}$:
   1. $\neg(A \to \neg B)$ Miembro de $\{\neg(A \to \neg B)\}$
   2. $(\neg B \to (A \to \neg B))$ Axioma, por SP_1
   3. $((A \to \neg B) \to \neg\neg(A \to \neg B))$ Ejercicio 4.1.6
   4. $(\neg B \to \neg\neg(A \to \neg B))$ Ejercicio 4.1.1, 2, 3
   5. $((\neg B \to \neg\neg(A \to \neg B)) \to (\neg(A \to \neg B) \to B))$ Axioma, por SP_3
   6. $(\neg(A \to \neg B) \to B)$ *MP* 4, 5
   7. B *MP* 1, 6

   $\square$

4. La siguiente es una derivación de $(\neg A \to B)$ a partir de $\{A\}$:
   1. A Miembro de $\{A\}$
   2. $(\neg\neg A \to (\neg A \to \neg\neg B))$ Teorema (ver prueba del Met. 4.9)
   3. $(A \to \neg\neg A)$ Ejercicio 4.1.6
   4. $\neg\neg A$ *MP* 1, 3
   5. $(\neg A \to \neg\neg B)$ *MP* 2, 4

6. $(\neg\neg B \to B)$ Ejercicio 4.1.5
7. $(\neg A \to B)$ Ejercicio 4.1.1, 5, 6

$\square$

5. La siguiente es una derivación de $(\neg A \to B)$ a partir de $\{B\}$:
   1. B Miembro de $\{B\}$
   2. $(B \to (\neg A \to B))$ Axioma, por SP_1
   3. $(\neg A \to B)$ *MP* 1, 2

   $\square$

6. La siguiente es una derivación de C a partir de $\{(\neg A \to B), (A \to C), (B \to C)\}$:
   1. $(\neg A \to B)$ Miembro de $\{(\neg A \to B), (A \to C), (B \to C)\}$
   2. $(A \to C)$ Miembro de $\{(\neg A \to B), (A \to C), (B \to C)\}$
   3. $(B \to C)$ Miembro de $\{(\neg A \to B), (A \to C), (B \to C)\}$
   4. $(\neg A \to C)$ Ejercicio 4.1.1, 1, 3
   5. $((A \to C) \to ((A \to \neg C) \to \neg A))$ Ejercicio 4.1.15
   6. $((A \to \neg C) \to \neg A)$ *MP* 2, 5
   7. A *MP* 4, 6
   8. C *MP* 2, 7

   $\square$

7. La siguiente es una derivación de $\neg(B \to B)$ a partir de $\{A, \neg A\}$:
   1. A Miembro de $\{A, \neg A\}$
   2. $\neg A$ Miembro de $\{A, \neg A\}$
   3. $(\neg A \to (A \to \neg(B \to B)))$ Teorema (ver prueba del Met. 4.9)
   4. $(A \to \neg(B \to B))$ *MP* 2, 3
   5. $\neg(B \to B)$ *MP* 1, 4

   $\square$

8. La siguiente es una derivación de B a partir de $\{A, \neg A\}$:
   1. A Miembro de $\{A, \neg A\}$
   2. $\neg A$ Miembro de $\{A, \neg A\}$
   3. $(\neg A \to (A \to B))$ Teorema (ver prueba del Met. 4.9)

4. $(A \to B)$ *MP* 2, 3

5. B *MP* 1, 4

$\square$

9. Si $A \vdash \neg(B \to B)$

$\Rightarrow \vdash (A \to \neg(B \to B))$ (Deducción)

La siguiente es una demostración de $\neg A$:

1. $(A \to \neg(B \to B))$ Teorema
2. $((A \to \neg(B \to B)) \to ((B \to B) \to \neg A))$ Ejercicio 4.1.13
3. $((B \to B) \to \neg A)$ *MP* 1, 2
4. $(B \to B)$ Ejercicio 4.1.4
5. $\neg A$ *MP* 3, 4

$\square$

10. La siguiente es una derivación de A a partir de $\{\neg\neg A\}$:

1. $\neg\neg A$ Miembro de $\{\neg\neg A\}$
2. $(\neg\neg A \to A)$ Ejercicio 4.1.5
3. A *MP* 1, 2

$\square$

Capítulo 5

Relaciones entre la semántica de *P* y el aparato deductivo *SP*

En este capítulo probaremos una serie de resultados que vinculan y homologan el enfoque semántico de la Lógica Proposicional que presentamos en el Capítulo 3 con el enfoque desde la teoría de la prueba que ofrecimos en el Capítulo 4. Ambos enfoques proponen una elucidación de la noción de consecuencia lógica o, lo que es lo mismo, de la validez de los razonamientos; y también de las verdades lógicas. El primero lo hace a través de la noción de consecuencia semántica y de la tautologicidad. El segundo mediante los conceptos de consecuencia sintáctica y teorema. Ambos lo hacen a partir del mismo lenguaje, *P*, y ambos han sido ligados a la Lógica Proposicional como abordajes de una única teoría. ¿Coincidirá el análisis propuesto por cada uno de estos enfoques? ¿Será cierto que cada vez que el primero afirme que una fórmula es consecuencia semántica de un conjunto de fórmulas el segundo afirme que es consecuencia sintáctica, y viceversa? ¿Será cierto que cada vez que el primero declare que una expresión es lógicamente verdadera el segundo la pruebe como teorema, y viceversa? La respuesta, como veremos en lo que resta del capítulo, es afirmativa.

En el Capítulo 4, mediante el Metateorema 4.11, hemos probado que todas aquellas expresiones que son teoremas de *SP* son a la vez lógicamente válidas. Esto implica que los teoremas de *SP* son verdaderos en toda valuación. *SP* no demuestra jamás una fórmula que podría ser falsa. El resultado es la denominada '*Corrección* *de SP*'.

Metateorema 5.1. CORRECCIÓN DE *SP*. Si $\vdash A \Rightarrow \vDash A$.

Prueba: Como hemos señalado, este enunciado es equivalente al del Metateorema 4.11 y, por ende, la demostración es la misma. □

Sin embargo, en *SP* no trabajamos únicamente con teoremas y demostraciones sino también con derivaciones y la relación de consecuencia sintáctica. *SP* no sólo es correcto con respecto al conjunto de sus teoremas sino que lo es asimismo cuando se trata de derivaciones y consecuencias sintácticas. Si una fórmula A es consecuencia sintáctica de un conjunto de fórmulas Γ, entonces no es posible que la primera sea falsa y los miembros del segundo verdaderos; esto es, no existe una valuación que asigne 0 a A y 1 a Γ, A será también consecuencia semántica de Γ. Este resultado se conoce con el nombre de '*Corrección Fuerte de SP*'; lo probaremos a continuación.

Metateorema 5.2. CORRECCIÓN FUERTE DE *SP*. Si $\Gamma \vdash A \Rightarrow \Gamma \vDash A$.

Estrategia de la prueba:

(1) Mostraremos que todos axiomas de *SP* son lógicamente válidos.

(2) Probaremos que el *MP* preserva la validez lógica.

(3) En base a estos dos resultados probaremos el Metateorema de Corrección Fuerte:

- Una vez más recurriremos al Principio de Inducción Matemática Completa. No probaremos el metateorema tal como lo hemos formulado sino que ofreceremos una demostración para el siguiente enunciado equivalente: '*Para todo número natural* n*, si existe una derivación de* A *a partir de* Γ *en un número* n *de pasos, entonces* $\Gamma \vDash A$.'.

Prueba:

(1) Sabemos que todos los axiomas de *SP* son lógicamente válidos, gracias al Metateorema 4.10, que probamos en el capítulo anterior.

(2) Sabemos también que el *MP* preserva la validez lógica, debido al Metateorema 3.2.

(3) Para todo número natural n, si existe una derivación de A a partir de Γ en un número n de pasos, entonces $\Gamma \vDash A$, pues:

- **Paso base:** Queremos ver que el metateorema vale para derivaciones de largo $n = 1$, ***i.e.*** que si existe una derivación de A a partir de Γ en un solo paso entonces $\Gamma \vDash A$.
  Si la derivación de A a partir de Γ consta de un único paso, por la Definición 4.4 sabemos que ese único paso está constituido por A y que A debe ser o bien un axioma de *SP* o bien un miembro de Γ, pues no tiene expresiones anteriores en la tira.
  - *Caso 1:* A es un axioma de *SP*. Luego, por (1) tenemos que $\vDash A$ y, por el Metateorema 3.8, que $\Gamma \vDash A$.
  - *Caso 2:* $A \in \Gamma$. Entonces, para toda valuación V, $V(\Gamma) = 1 \Rightarrow V(A) = 1$. Luego, en virtud de la Definición 3.5, $\Gamma \vDash A$.
- **Paso inductivo:** Queremos ver que si el metateorema vale para derivaciones de largo menor a un número natural arbitrario k, también vale para k. Luego, tenemos:
  Hipótesis inductiva: Si existe una derivación de A a partir de Γ con un número menor que k de pasos, entonces $\Gamma \vDash A$.
  Tesis inductiva: Si existe una derivación de A a partir de Γ en k pasos, entonces $\Gamma \vDash A$.
  Prueba: Sea A un enunciado derivable a partir de Γ en exactamente k pasos. Luego, por la Definición 4.4., existe una tira finita de fórmulas de *P*, cada una de las cuales es o bien un axioma de *SP*, o bien un miembro de Γ, o bien una consecuencia inmediata de dos expresiones anteriores por *MP*, y la última fórmula de la tira es A. Por ende, tenemos tres posibilidades: que A sea una axioma de *SP*, que $A \in \Gamma$ y que A sea una consecuencia por *MP* de dos expresiones anteriores en la tira. Los dos primeros casos son idénticos a los analizados en el paso base y serán, consecuentemente pasados por alto. Es preciso, en cambio, examinar el último cuidadosamente:
  - *Caso 3.* A es una consecuencia inmediata por *MP* de dos fórmulas anteriores en la tira. A ocupa el paso k de la derivación. Luego, existen dos fórmulas anteriores a A, B_i y B_j, donde i y j indican el lugar que tienen en la tira y, por ende, $i < k$ y $j < k$. Además, como A es consecuencia por *MP* de estas dos expresiones, una de ellas debe tener forma condicional, tal que su antecedente esté constituido por la otra y su consecuente por A. Sin pérdida de generalidad, diremos que $B_i \equiv (B_j \to A)$.
    Puesto que tanto B_i como B_j aparecen en la derivación de A,

podemos remover todos los pasos subsiguientes a cada una de ellas en esta derivación y obtener derivaciones de longitud i y j, respectivamente, ambas menores a k. Luego, por hipótesis inductiva, $\Gamma \vDash B_i$ y $\Gamma \vDash B_j$ o, lo que es lo mismo, $\Gamma \vDash (B_j \to A)$ y $\Gamma \vDash B_j$. Por el Metateorema 3.7, podemos afirmar que $\Gamma \vDash A$, que es lo que queríamos.

Consecuentemente, por el Principio de Inducción Matemática Completa presentado en la Definición 4.7, tenemos que, para todo número natural n, si existe una derivación de A a partir de Γ en un número de pasos, entonces $\Gamma \vDash A$ o, lo que es lo mismo, si $\Gamma \vdash A$ entonces $\Gamma \vDash A$.

□

Hemos probado que *SP* es un sistema correcto con respecto a nuestra semántica, esto es, que sólo tiene como teoremas expresiones lógicamente válidas, y que una expresión es derivable a partir de otras únicamente cuando es una consecuencia semántica de ellas. ¿Demostrará *SP* ***todas*** las fórmulas lógicamente válidas de *P*? ¿Es posible obtener como teorema en *SP* cualquier expresión tautológica? En efecto, lo es. También es cierto que cada vez que una fórmula sea consecuencia semántica de un conjunto de fórmulas existirá una derivación de la primera a partir del segundo. Esta propiedad de *SP* se conoce con el nombre de '***completitud de SP***'.[1] Para probar que *SP* es completo, introduciremos primero una serie de nociones útiles.

Definición 5.1. Un conjunto Γ de expresiones de *P* es ***maximal consistente*** si y sólo si es consistente y toda fórmula A del lenguaje cumple alguna de las siguientes dos condiciones:

1. $A \in \Gamma$,
2. $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ y $\Gamma \cup \{A\} \vdash \neg B$, para alguna fórmula B de *P*.

Intuitivamente, llamamos "maximales consistentes" a aquellos conjuntos consistentes de fórmulas a los cuales que no se les puede incorporar una nueva expresión sin que se tornen inconsistentes; están saturados.

[1]Existe al menos otra noción de completitud para un aparato deductivo, a saber, aquella según la cual un aparato deductivo es completo siempre y cuando cualquier expresión del lenguaje en el cual está formulado es tal que ella o su negación son teoremas. Frecuentemente, esta propiedad recibe el nombre de '***completitud con respecto a la negación***', es importante no confundirla con la Completitud de *SP*, que probaremos a continuación. *SP* no es completo con respecto a la negación pues, como mostramos en la solución al Ejercicio 5.2.1, ni p' ni su negación son teoremas de este sistema.

Definición 5.2. Un *método efectivo* es un conjunto finito de instrucciones que indican cómo realizar paso por paso una determinada tarea, de modo tal que no se involucre la imaginación, fuentes externas de información ni métodos azarosos. Dicho de otra manera, es un procedimiento para resolver un problema, un mecanismo que, de seguirlo, ofrece la respuesta correcta, por sí o por no, a una determinada pregunta en un tiempo finito.

En primer lugar, es necesario despojar de la definición a los matices subjetivos que puedan traslucirse. Un método efectivo no es un procedimiento que necesariamente pueda ser realizado por un ser humano. Notemos que la única restricción que se impone es que la serie de pasos a aplicar sean finitos. No hay consideraciones respecto del tiempo, los recursos técnicos o las capacidades psicológicas de un sujeto. La receta para una omelette puede ser considerada un método efectivo. Sin embargo, una omelette del tamaño de Júpiter es una tarea irrealizable desde el punto de vista práctico. En este sentido, podría suceder que los pasos a seguir en un método efectivo sean tantos que recorrerlos tome un milenio.

En segundo lugar, debería llamarnos la atención el hecho de que en este caso, contrario a las nociones que estuvimos considerando hasta el momento, la definición está dada en términos intuitivos o preteóricos. Al igual que sucede con la noción de consecuencia lógica, podemos intentar capturar el concepto intuitivo en un concepto más riguroso. Pero, también como en ese caso, la coextensionalidad de ambas nociones será siempre una hipótesis, que sólo puede ser refutada mediante un contraejemplo. La presentación de presuntos contraejemplos a la Lógica de Predicados ha llevado tanto a la creación de distintas lógicas complementarias, la Lógica Modal es una de ellas, como a cuestionamientos acerca de la adecuación de la Teoría de Modelos.

La propuesta para el concepto de método efectivo en matemática y lógica es considerar que todo procedimiento efectivo puede ser representado por una Máquina de Turing. La tesis de que ambos conceptos coinciden se denomina “Tesis de Church” y hasta el momento parece sostenerse incólume.[2]

Definición 5.3. Una *enumeración efectiva* de los elementos de un conjunto es una función que asigna números naturales a esos elementos, de modo tal que:

1. un mismo número no corresponde a más de un elemento;
2. existe un método efectivo para, dado cualquier número natural n, saber a qué miembro del conjunto fue asignado.

[2] Para una exposición detallada de estas cuestiones, véase Bolos *et al.* [1].

A continuación probaremos un resultado de completitud para *SP*, a saber, que cada vez que una fórmula sea consecuencia semántica de un conjunto de fórmulas, la primera también será una consecuencia sintáctica del segundo. La demostración de este enunciado bastará para afirmar que toda tautología es un teorema de *SP*, pues es una instancia particular del enunciado anterior; es suficiente con considerar los casos en los cuales Γ es el conjunto vacío.

La prueba que ofreceremos de la completitud de *SP* se denomina '*prueba de Henkin*'. No es el único modo de demostrar este resultado, pero es interesante porque su grado de complejidad no es tan alto como en otras pruebas, y porque se trata de un tipo de estrategia que veremos repetirse en otros metateoremas (en este cuadernillo, en particular, en la demostración del Metateorema de Compacidad).

Estrategia general de la prueba:

(1) Mostraremos que si $\Gamma \vDash A$ entonces $\Gamma \cup \{\neg A\}$ es insatisfacible:

- Lo haremos directamente a partir de la definición de consecuencia semántica y de satisfacibilidad. Si A es consecuencia semántica de Γ, no existe una valuación que asigne 1 a Γ y 0 a A o, lo que es lo mismo, 1 a $\neg A$. Luego, no existe una valuación que asigne 1 al conjunto $\Gamma \cup \{\neg A\}$, este conjunto no tiene modelo y es, por tanto, insatisfacible.

(2) Probaremos que si $\Gamma \cup \{\neg A\}$ es insatisfacible entonces es también inconsistente:

- Probaremos primero que si Γ es un conjunto maximal consistente entonces:
  1. Dada una fórmula cualquiera A de *P*, o bien ella o bien su negación, $\neg A$, son miembros de Γ.
  2. Toda fórmula A que pueda derivarse a partir de Γ es un miembro de este conjunto: si $\Gamma \vdash A \Rightarrow A \in \Gamma$.

  Estas dos propiedades serán oportunamente probadas en los Metateoremas 5.4 y 5.5, respectivamente.
- Demostraremos luego un resultado conocido como '*Metateorema de Enumeración*'.
- Utilizando este metateorema y las propiedades de conjuntos maximales consistentes mencionadas, probaremos el *Lema de Lindenbaum*, que afirma que los conjuntos consistentes son siempre subconjuntos de

algún conjunto maximal consistente, esto es, cualquier conjunto consistente Γ de fórmulas de *P* puede extenderse (incorporándole expresiones) a un conjunto Γ_{max} maximal consistente.

- Luego, probaremos, recurriendo al Lema de Lindenbaum, que si un conjunto Γ es consistente entonces tiene un modelo, es satisfacible. Este resultado se denomina '*Lema de Henkin*'. La estrategia de la demostración consistirá en probar el lema, no para un conjunto consistente Γ cualquiera, sino para un conjunto maximal consistente Γ_{max}, construido a partir de un conjunto consistente cualquiera Γ. El Lema de Lindenbaum nos asegura que los conjuntos consistentes son subconjuntos de algún conjunto maximal consistente, con lo cual, si probamos que Γ_{max} tiene modelo, habremos probado lo mismo para todos sus subconjuntos, en particular, para Γ. Recurrir a conjuntos maximales consistentes en la prueba de este lema nos permite ciertas ventajas técnicas, pues los conjuntos maximales consistentes tienen propiedades útiles, como habremos mostrado mediante los Metateoremas 5.4 y 5.5.
- Aplicaremos finalmente el Lema de Henkin al conjunto $\Gamma \cup \{\neg A\}$, que dado que no es satisfacible, como habremos probado (suponiendo que $\Gamma \vDash A$), será inconsistente.

(3) Demostraremos que si $\Gamma \cup \{\neg A\}$ es inconsistente $\Rightarrow \Gamma \vdash A$:

- Para probarlo, recurriremos al Metateorema de la Deducción, que hemos demostrado en el capítulo anterior.

Paso a paso:

(1) Metateorema 5.3. Si $\Gamma \vDash A \Rightarrow \Gamma \cup \{\neg A\}$ es insatisfacible.

Prueba: Si $\Gamma \vDash A$

$\Rightarrow$ no existe una valuación V tal que $V(\Gamma) = 1$ y $V(A) = 0$ (Def. 3.5)

$\Rightarrow$ no existe una valuación V tal que $V(\Gamma) = 1$ y $V(\neg A) = 1$ (Def. 3.1, 1)

$\Rightarrow$ no existe una valuación V tal que $V(\Gamma \cup \{\neg A\}) = 1$

$\Rightarrow \Gamma \cup \{\neg A\}$ es insatisfacible. (Def. 3.3) $\square$

(2) Metateorema 5.4. Si Γ es un conjunto maximal consistente $\Rightarrow$ para toda fórmula A de *P*, o bien $A \in \Gamma$ bien $\neg A \in \Gamma$, pero no ambas.

Prueba: Si Γ es maximal consistente

$\Rightarrow \Gamma$ es consistente y, para toda fórmula A, o bien $A \in \Gamma$ o bien $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ y $\Gamma \cup \{A\} \vdash \neg B$ para alguna fórmula B. (Def. 5.1)

- Supongamos por absurdo que no es cierto que toda fórmula A de *P* es tal que o bien $A \in \Gamma$ bien $\neg A \in \Gamma$. Luego, existe una fórmula A tal que $A \notin \Gamma$ y $\neg A \notin \Gamma$

  $\Rightarrow$ existen dos fórmulas B y C tales que $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ y $\Gamma \cup \{A\} \vdash \neg B$ y $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash C$ y $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash \neg C$ (Def. 5.1)

  $\Rightarrow$ existen dos fórmulas B y C tales que $\Gamma \vdash (A \to B)$ y $\Gamma \vdash (A \to \neg B)$ y $\Gamma \vdash (\neg A \to C)$ y $\Gamma \vdash (\neg A \to \neg C)$. (Deducción)

  La siguiente es una derivación de $\neg A$ a partir de Γ:

  1. $(A \to B)$
  2. $(A \to \neg B)$
  3. $((A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A))$ Ejercicio 4.1.15
  4. $((A \to \neg B) \to \neg A)$ *MP* 1, 3
  5. $\neg A$ *MP* 2, 4

  Luego, $\Gamma \vdash \neg A$. [1]

  La siguiente es una derivación de A a partir de Γ:

  1. $(\neg A \to C)$
  2. $(\neg A \to \neg C)$
  3. $((\neg A \to C) \to ((\neg A \to \neg C) \to \neg\neg A))$ Ejercicio 4.1.15
  4. $((\neg A \to \neg C) \to \neg\neg A)$ *MP* 1, 3
  5. $\neg\neg A$ *MP* 2, 4
  6. $(\neg\neg A \to A)$ Ejercicio 4.1.5
  7. A *MP* 5, 6

  Luego, $\Gamma \vdash A$. [2]

  De [1] y [2], por la Definición 4.6, Γ es inconsistente, lo cual es un absurdo porque dijimos que era consistente. El absurdo partió de suponer que no es cierto que toda fórmula A de *P* es tal que o bien $A \in \Gamma$ bien $\neg A \in \Gamma$. Luego, para toda fórmula A, o bien $A \in \Gamma$ o bien $\neg A \in \Gamma$.[3]

- Supongamos ahora por absurdo que tanto $A \in \Gamma$ como $\neg A \in \Gamma$, para alguna fórmula A

  $\Rightarrow \Gamma \vdash A$ y $\Gamma \vdash \neg A$ (Ejer. 4.1.17)

  $\Rightarrow \Gamma$ es inconsistente (Def. 4.6)

  lo cual es un absurdo porque dijimos que era consistente. El absurdo partió de suponer que existía una expresión A tal que tanto $A \in \Gamma$ como $\neg A \in \Gamma$. Luego, para toda fórmula A, no es el caso de que $A \in \Gamma$ y $\neg A \in \Gamma$.

[3] Por la regla de Introducción de la Negación.

□

Metateorema 5.5. Si Γ es maximal consistente y $\Gamma \vdash A \Rightarrow A \in \Gamma$.

Prueba: Sea Γ maximal consistente y $\Gamma \vdash A$

Supongamos por absurdo que $A \notin \Gamma$

$\Rightarrow \neg A \in \Gamma$ (Met. 5.4)

$\Rightarrow \Gamma \vdash \neg A$ (Ejer. 4.1.17)

$\Rightarrow \Gamma \vdash A$ y $\Gamma \vdash \neg A$

$\Rightarrow \Gamma$ es inconsistente. (Def. 4.6)

Hemos llegado a un absurdo, pues dijimos que Γ era consistente. El absurdo partió de suponer que $A \notin \Gamma$. Luego, $A \in \Gamma$. □

Metateorema 5.6. METATEOREMA DE ENUMERACIÓN. Existe una enumeración efectiva de todas las expresiones de *P*.

Prueba: Comenzaremos por asignar numerales a los símbolos del vocabulario de *P* del siguiente modo:

p	10
$'$	100
$\neg$	1000
$\rightarrow$	10000
(	100000
)	1000000

Diremos que el ***numeral*** de una fórmula es aquel que se obtiene yuxtaponiendo los numerales de sus símbolos de izquierda a derecha. Por ejemplo, el numeral de la fórmula $(p' \rightarrow p'')$ es 1000001010010000101001001000000. De este modo, cada fórmula tendrá un numeral distinto asociado a ella.

Ordenamos entonces las expresiones de *P* de acuerdo con sus numerales, de menor a mayor. Esta enumeración es efectiva, pues a fórmulas diferentes de *P* les corresponden diversos números y existe un método efectivo para encontrar, para cualquier número n, la fórmula que se encuentra en el lugar n:

1. El numeral más chico es el correspondiente a la fórmula p', es decir, 10100.

2. A partir de allí se va avanzando de diez en diez, chequeando para cada numeral resultante si corresponde o no a una fórmula (la definición de fórmula bien formada de *P* nos da un método efectivo para saber si una cadena de símbolos es o no una fórmula). Si corresponde, se anota la expresión en una lista, a continuación de las anteriores, hasta haber anotado n fórmulas.

Incluso existe (aunque esto no es necesario para que la enumeración sea efectiva) un método efectivo para encontrar para cualquier fórmula su posición en la lista:

1. Se calcula el numeral de la fórmula.
2. Se parte del numeral 10100 y se van listando todas las fórmulas hasta encontrar la deseada. La cantidad de expresiones listadas hasta el número de la fórmula original nos dará su posición en la lista.

□

Metateorema 5.7. LEMA DE LINDENBAUM. Todo conjunto consistente es un subconjunto de algún conjunto maximal consistente.

Estrategia de la prueba:

(a) Utilizando el Metateorema de Enumeración, definimos un conjunto que será una expansión de cualquier conjunto consistente de expresiones, Γ, y que notaremos "Γ_{max}".[4]

(b) Probamos que Γ_{max} es maximal consistente.

- Probamos que Γ_{max} es consistente.
- Mostramos que, para toda fórmula A, o bien $A \in \Gamma_{max}$ o bien $\Gamma_{max} \cup \{A\}$ es inconsistente.

Prueba:

(a) Dado un conjunto consistente cualquiera, Γ, y $S = \langle A_1, A_2, ...\rangle$ la enumeración efectiva de las fórmulas de *P* empleada en la prueba del Metateorema de la Enumeración, definimos una secuencia infinita $S' =$

[4] Al ser Γ_{max} una expansión de Γ, sabemos que este último está incluido en el primero o, lo que es lo mismo, es un subconjunto del primero.

$\langle \Gamma_0, \Gamma_1, ..., \Gamma_n, ...\rangle$ de conjuntos cada vez más grandes[5] del siguiente modo:

$\Gamma_0 = \Gamma$.

Si $\Gamma_n \cup \{A_{n+1}\}$ es inconsistente $\Rightarrow \Gamma_{n+1} = \Gamma_n$.

Si $\Gamma_n \cup \{A_{n+1}\}$ es consistente $\Rightarrow \Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{A_{n+1}\}$.

Intuitivamente, procedemos partiendo de Γ (o de Γ_0, que es lo mismo) y tomando la primera fórmula de S, A_1. Si es posible incorporarla a Γ_0 sin dar con un conjunto inconsistente, la agregamos, obteniendo el conjunto Γ_1. Si no lo es, no la incorporamos, y decimos que $\Gamma_1 = \Gamma$. Repetimos luego el procedimiento, partiendo ahora de Γ_1 y preguntándonos si la incorporación de A_2 genera inconsistencias en este conjunto. Y así sucesivamente.

Sea Γ_{max} la unión de todos los conjuntos de la secuencia S'.

(b) Γ_{max} es un conjunto maximal consistente, pues:

- Es consistente:
  Para todo número natural n, Γ_n es consistente:
  - **Paso base:** Queremos ver que Γ_0 es consistente, lo cual es verdadero por hipótesis, pues Γ lo es.[6]
  - **Paso inductivo:** Queremos ver que si todo Γ_m con $m < k$ es consistente, también Γ_k lo es. Luego, tenemos:
    Hipótesis inductiva: Si $m < k \Rightarrow \Gamma_m$ es consistente.
    Tesis inductiva: Γ_k es consistente.
    Prueba: Caben dos posibilidades ($k > 0$, ya analizamos el caso en el que $k = 0$ en el paso base) de acuerdo con la definición de la secuencia S' que dimos en (a):
    - *Caso 1.* $\Gamma_k = \Gamma_{k-1}$, lo cual implica que $\Gamma_{k-1} \cup \{A_k\}$ es inconsistente. Como $k - 1 < k$, por hipótesis inductiva, Γ_{k-1} es consistente y, luego, Γ_k también lo es.
    - *Caso 2.* $\Gamma_k = \Gamma_{k-1} \cup \{A_k\}$. Esto implica que $\Gamma_{k-1} \cup \{A_k\}$ es consistente, pues así definimos Γ_{max} en (a), y, por lo tanto, Γ_k también lo es.

[5] Con "cada vez más grandes" queremos decir que $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq ... \subseteq \Gamma_n \subseteq ...$, de modo que, en realidad, no tienen porqué ser cada vez más abarcativos sino que pueden ser iguales a los que los preceden, aunque no descartar miembros.

[6] Partimos de 0 en lugar de de 1. No obstante, eso no afecta la aplicabilidad del Principio de Inducción Matemática Completa, ya que una versión alternativa del principio que parta de 0 es implicada lógicamente por la versión que presentamos en el capítulo anterior, la cual parte de 1. Basta notar que del paso base relativo a 0 y el paso inductivo se infiere el paso base relativo a 1, y los pasos inductivos de ambos principios son idénticos.

En consecuencia, por el Principio de Inducción, todos los conjuntos de la secuencia S' son consistentes.
Supongamos por absurdo pues que Γ_{max} es inconsistente
$\Rightarrow$ existe una fórmula A tal que $\Gamma_{max} \vdash A$ y $\Gamma_{max} \vdash \neg A$ (Def. 4.6)
$\Rightarrow$ existen derivaciones de A y de $\neg A$ a partir de Γ_{max}. (Def. 4.5)
Sea A_k la fórmula con el mayor numeral asociado de las que aparecen en estas derivaciones
$\Rightarrow \Gamma_k \vdash A$ y $\Gamma_k \vdash \neg A$ (Def. Γ_n en (a))
$\Rightarrow \Gamma_k$ es inconsistente. (Def. 4.6)
Pero ya probamos que, para todo n, Γ_n es consistente. Llegamos a un absurdo, que partió de suponer que Γ_{max} es inconsistente. Luego, es consistente.

- Toda fórmula A es tal que o bien $A \in \Gamma_{max}$ o bien existe una fórmula B de *P* tal que $\Gamma_{max} \cup \{A\} \vdash B$ y $\Gamma_{max} \cup \{A\} \vdash \neg B$.
  Sea A una fórmula cualquiera y n el numeral de A, la posición que tiene en S', cuya existencia queda garantizada por el Metateorema de la Deducción. Caben dos posibilidades:
  $A \in \Gamma_{max}$ o $A \notin \Gamma_{max}$. [1]
  Si $A \in \Gamma_{max} \Rightarrow A \in \Gamma_{max}$ o bien existe una fórmula B tal que $\Gamma_{max} \cup \{A\} \vdash B$ y $\Gamma_{max} \cup \{A\} \vdash \neg B$.[7] [2]
  Si $A \notin \Gamma$
  $\Rightarrow A_n \notin \Gamma_n$[8]
  $\Rightarrow \Gamma_{n-1} \cup \{A_n\}$ es inconsistente (Def. Γ_n en (a))
  $\Rightarrow$ para alguna fórmula B, $\Gamma_{n-1} \cup \{A_n\} \vdash B$ y $\Gamma_{n-1} \cup \{A_n\} \vdash \neg B$ (Def. 4.6)
  $\Rightarrow$ para alguna fórmula B, $\Gamma_{max} \cup \{A_n\} \vdash B$ y $\Gamma_{max} \cup \{A_n\} \vdash \neg B$ (Met. 4.2)[9]
  $\Rightarrow$ para alguna fórmula B, $\Gamma_{max} \cup \{A\} \vdash B$ y $\Gamma_{max} \cup \{A\} \vdash \neg B$.
  Por tanto, si $A \notin \Gamma_{max} \Rightarrow$ para alguna fórmula B, $\Gamma_{max} \cup \{A\} \vdash B$ y $\Gamma_{max} \cup \{A\} \vdash \neg B$[10]
  $\Rightarrow$ si $A \notin \Gamma_{max} \Rightarrow A \in \Gamma_{max}$ o, para alguna fórmula B, $\Gamma_{max} \cup \{A\} \vdash B$ y $\Gamma_{max} \cup \{A\} \vdash \neg B$. [3]
  De [1], [2] y [3] tenemos que $A \in \Gamma_{max}$ o, para alguna fórmula B, $\Gamma_{max} \cup \{A\} \vdash B$ y $\Gamma_{max} \cup \{A\} \vdash \neg B$.[11]

---

[7] Por la regla de Introducción de la Disyunción.
[8] Pues si estuviera en Γ_n, por ser éste un subconjunto de Γ, también sería un miembro de Γ.
[9] Pues $\Gamma_{max} \cup \Gamma_{n-1} \cup \{A_n\} \equiv \Gamma_{max} \cup \{A_n\}$, ya que Γ_{n-1} está incluido en Γ_{max}; no le agrega nada.
[10] Por la regla de la Introducción del Condicional material.
[11] Por una aplicación de la regla de Eliminación de la Disyunción.

$\square$

Metateorema 5.8. Lema de Henkin. Si Γ es un conjunto consistente de fórmulas $\Rightarrow \Gamma$ es satisfacible.

Estrategia de la prueba:

(a) Empleando el Metateorema de Lindenbaum, construimos un conjunto Γ_{max} maximal consistente a partir de cualquier conjunto Γ consistente.

(b) Definimos una valuación V tal que asigne 1 a toda fórmula perteneciente a Γ_{max} y 0 a toda fórmula no perteneciente a este conjunto.

(c) Probamos esto por Inducción sobre el número de conectivas de A: que, para toda fórmula A, $V(A) = 1 \Leftrightarrow A \in \Gamma_{max}$.

Prueba:

(a) Si Γ es un conjunto consistente
$\Rightarrow$ existe un conjunto de fórmulas Γ_{max} maximal consistente tal que $\Gamma \subseteq \Gamma_{max}$. (Lindenbaum)

(b) Sea V una valuación tal que para toda fórmula atómica A, ($A \in \Gamma_{max} \Leftrightarrow V(A) = 1$).

(c) Para todo n, si A tiene exactamente n conectivas $\Rightarrow$ ($V(A) = 1 \Leftrightarrow A \in \Gamma_{max}$), pues:

- **Paso base:** Queremos ver que si A es una fórmula atómica, ($V(A) = 1 \Leftrightarrow A \in \Gamma_{max}$), lo cual es verdadero en vista de la definición de V dada en (b).
- **Paso inductivo:** Queremos ver que si cualquier fórmula A con menos de k conectivas ($V(A) = 1 \Leftrightarrow A \in \Gamma_{max}$), entonces ($V(B) = 1 \Leftrightarrow B \in \Gamma_{max}$) para cualquier fórmula B con exactamente a k conectivas. Luego, tenemos:
  Hipótesis inductiva: Si A tiene menos de k conectivas, ($V(A) = 1 \Leftrightarrow A \in \Gamma_{max}$).
  Tesis inductiva: Si A tiene k conectivas, ($V(A) = 1 \Leftrightarrow A \in \Gamma_{max}$).
  Prueba: Sea A una fórmula con k conectivas ($k > 0$, para $k = 0$ lo probamos ya en el paso base). Caben dos posibilidades: que A sea una negación o que sea una fórmula condicional.
  - *Caso 1.* $A \equiv \neg B$
    $\Rightarrow$ ($V(A) = 1 \Leftrightarrow V(\neg B) = 1$)

$\Rightarrow (V(A) = 1 \Leftrightarrow V(B) = 0)$. [1] (Def. 3.1, 1)
Como B tiene $k-1$ conectivas
$\Rightarrow (V(B) = 1 \Leftrightarrow B \in \Gamma_{max})$ (Hip. ind.)
$\Rightarrow (V(B) = 1 \Leftrightarrow \neg B \notin \Gamma_{max})$ (Met. 5.4)
$\Rightarrow (V(B) = 0 \Leftrightarrow \neg B \in \Gamma_{max})$[12]
$\Rightarrow (V(B) = 0 \Leftrightarrow A \in \Gamma_{max})$. [2]
$\Rightarrow (V(A) = 1 \Leftrightarrow A \in \Gamma_{max})$ ([1] y [2])

- *Caso 2*. $A \equiv (B \rightarrow C)$[13]
$\Rightarrow B$ y C tienen menos de k conectivas
$\Rightarrow (V(B) = 1 \Leftrightarrow B \in \Gamma_{max})$ y $(V(C) = 1 \Leftrightarrow C \in \Gamma_{max})$. [3] (Hip. ind.)

$\Rightarrow$) Si $V(A) = 1$
$\Rightarrow V(B) = 0$ o $V(C) = 1$ (Def. 3.1., 2)
$\Rightarrow B \notin \Gamma_{max}$ o $C \in \Gamma_{max}$. [4] ([3])
Si $B \notin \Gamma_{max}$
$\Rightarrow \neg B \in \Gamma_{max}$ (Met. 5.4)
$\Rightarrow \Gamma_{max} \vdash \neg B$ (Ejer. 4.1.17)
La siguiente es una derivación de $(B \rightarrow C)$ a partir de Γ_{max}:
1. $\neg B$
2. $(\neg B \rightarrow (B \rightarrow C))$ (ver prueba del Met. 4.9)
3. $(B \rightarrow C)$ *MP* 1, 2
Luego, $\Gamma_{max} \vdash A$
$\Rightarrow A \in \Gamma_{max}$. (Met. 5.5)
Por tanto, si $B \notin \Gamma_{max} \Rightarrow A \in \Gamma_{max}$. [5]
Si $C \in \Gamma_{max}$
$\Rightarrow \Gamma_{max} \vdash C$ (Ejer. 4.1.17).
La siguiente es una derivación de $(B \rightarrow C)$ a partir de Γ_{max}:
1. C
2. y $(C \rightarrow (B \rightarrow C))$ (SP_1)
3. $(B \rightarrow C)$ *MP* 1, 2
Luego, $\Gamma_{max} \vdash A$
$\Rightarrow A \in \Gamma_{max}$. (Met. 5.5)
Por tanto, si $C \in \Gamma_{max} \Rightarrow A \in \Gamma_{max}$. [6]
De [4], [5] y [6], sabemos que $A \in \Gamma_{max}$.

$\Leftarrow$) Si $V(A) = 0$
$\Rightarrow V(B) = 1$ y $V(C) = 0$ (Def. 3.1, 1)

[12] Pues si dos afirmaciones son equivalentes, en este caso $V(B) = 1$ y $\neg B \notin \Gamma_{max}$, sus negaciones, $V(B) = 0$ y $\neg B \in \Gamma_{max}$ respectivamente, también lo son.

[13] Probaremos el bicondicional '$V(A) = 1 \Leftrightarrow A \in \Gamma_{max}$' por partes, comenzando por la dirección izquierda-derecha y siguiendo por la contraria.

$\Rightarrow B \in \Gamma_{max}$ y $C \notin \Gamma_{max}$ ([3])
$\Rightarrow B \in \Gamma_{max}$ y $\neg C \in \Gamma_{max}$ (Met. 5.4)
$\Rightarrow \Gamma_{max} \vdash B$ y $\Gamma_{max} \vdash \neg C$. (Ejer. 4.1.17)
La siguiente es una derivación de $\neg A$ a partir de Γ_{max}:
1. B
2. $\neg C$
3. $(B \to (\neg C \to \neg(B \to C)))$ (Ejer. 4.1.12)
4. $(\neg C \to \neg(B \to C))$ *MP* 1, 3
5. $\neg(B \to C)$ *MP* 2, 4

Luego, $\Gamma_{max} \vdash \neg A$. Supongamos por absurdo que $\Gamma_{max} \vdash A$. En ese caso, Γ_{max} sería inconsistente, a la luz de la Definición 4.6, lo cual hemos dicho que es falso. Llegamos pues a un absurdo, que partió de suponer que $\Gamma_{max} \vdash A$. Luego, $\Gamma_{max} \nvdash A$.
Consiguientemente, Si $V(A) = 0 \Rightarrow \Gamma_{max} \nvdash A$; con lo cual, por contrarrecíproco, si $\Gamma_{max} \vdash A \Rightarrow V(A) = 1$.

Luego, por el Principio de Inducción Matemática Completa, para todo A, ($V(A) = 1 \Leftrightarrow A \in \Gamma_{max}$).

□

(3) Metateorema 5.9. Si $\Gamma \cup \{\neg A\}$ es inconsistente $\Rightarrow \Gamma \vdash A$.

Prueba: Si $\Gamma \cup \{\neg A\}$ es inconsistente

$\Rightarrow$ existe una fórmula B tal que $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash B$ y $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash \neg B$ (Def. 4.6)

$\Rightarrow$ existe una fórmula B tal que $\Gamma \vdash (\neg A \to B)$ y $\Gamma \vdash (\neg A \to \neg B)$. (Deducción)

La siguiente es una derivación de A a partir de Γ:

1. $(\neg A \to B)$
2. $(\neg A \to \neg B)$
3. $((\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to \neg\neg A))$ (Ejer. 4.1.15)
4. $((\neg A \to \neg B) \to \neg\neg A)$ *MP* 1, 3
5. $\neg\neg A$ *MP* 2, 4
6. $(\neg\neg A \to A)$ (Ejer. 4.1.5)
7. A *MP* 5, 6 □

Metateorema 5.10. Completitud Fuerte de *SP*. Si $\Gamma \vDash A \Rightarrow \Gamma \vdash A$.

Prueba: Si $\Gamma \vDash A$

$\Rightarrow \Gamma \cup \{\neg A\}$ es insatisfacible (Met. 5.3)

$\Rightarrow \Gamma \cup \{\neg A\}$ es inconsistente (Henkin)

$\Rightarrow \Gamma \vdash A$. (Met. 5.9) □

Metateorema 5.11. COMPLETITUD DE *SP*. Si $\vDash A \Rightarrow\ \vdash A$.

Prueba: Si $\vDash A$

$\Rightarrow \phi \vDash A$ (Met. 3.8)

$\Rightarrow \phi \vdash A$ (Completitud Fuerte)

$\Rightarrow\ \vdash A$. (Met. 4.6) □

Notemos que, en virtud de los teoremas de Corrección y Completitud Fuertes de *SP*, las nociones de consecuencia semántica y consecuencia sintáctica son equivalentes:

Metateorema 5.12. $\Gamma \vDash A \Leftrightarrow \Gamma \vdash A$.

Prueba:

$\Rightarrow$) Si $\Gamma \vDash A$

$\Rightarrow \Gamma \vdash A$. (Completitud Fuerte)

$\Leftarrow$) Si $\Gamma \vdash A$

$\Rightarrow \Gamma \vDash A$. (Corrección Fuerte)

□

Metateorema 5.13. FINITUD: Si $\Gamma \vdash A \Rightarrow$ existe un conjunto $\Delta \subseteq \Gamma$, finito, tal que $\Delta \vdash A$.

Prueba: Si $\Gamma \vdash A$

$\Rightarrow$ existe una derivación de A a partir de Γ (Def. 4.5)

$\Rightarrow$ existe una tira finita de expresiones de *P*, cada una de las cuales es o bien un axioma de *SP*, o bien un miembro de Γ, o bien una consecuencia inmediata de dos fórmulas anteriores por *MP*, y la última expresión de la tira es A. (Def. 4.4)

Puesto que la tira tiene únicamente un número finito de pasos, sólo una cantidad finita de elementos de Γ han sido empleados en ella. Sea Δ el conjunto de todos los elementos de Γ que aparecen allí. Luego:

$\Delta \subseteq \Gamma$ y existe una tira finita de expresiones de *P*, cada una de las cuales es o bien un axioma de *SP*, o bien un miembro de Δ, o bien una consecuencia inmediata de dos fórmulas anteriores por *MP*, y la última expresión de la tira es A

$\Rightarrow$ existe una derivación de A a partir de Δ (Def. 4.4)

$\Rightarrow \Delta \vdash A$. (Def. 4.5) □

Este metateorema, que se deriva directamente del requisito de finitud de una derivación, tiene un análogo semántico conocido como '*Metateorema de Compacidad*', que afirma que si una fórmula es consecuencia semántica de un conjunto de fórmulas entonces también lo es de un subconjunto finito de aquél.

Ofreceremos dos pruebas distintas de este resultado, con distintos grados de generalidad. La primera, que llamaremos "prueba$_a$", no supone completitud, con lo cual podrá extenderse a sistemas incompletos, pero seguirá suponiendo una cantidad numerable de fórmulas. Es posible dar pruebas que no supongan tampoco esto último, pero por su complejidad no vamos a presentarlas aquí.

La segunda, la prueba$_b$, se vale de la Completitud Fuerte de *SP*, que a su vez recurre al Metateorema de Enumeración. Esto quiere decir que sólo podrá extenderse a sistemas que sean completos y tengan únicamente tantas expresiones como números naturales, como es el caso de *SP*.

Para el desarrollo de la primera prueba del resultado de Compacidad, es preciso introducir los siguientes conceptos:

Definición 5.4. Un conjunto de expresiones de *P* es *finitamente satisfacible* si y sólo si todos sus subconjuntos finitos son satisfacibles.

Definición 5.5. Un conjunto Γ de expresiones de *P* es *maximal finitamente satisfacible* si y sólo si es finitamente satisfacible y toda fórmula A del lenguaje cumple alguna de las siguientes dos condiciones:

1. $A \in \Gamma$,
2. $\Gamma \cup \{A\}$ no es finitamente satisfacible.

Análogamente a la prueba del Metateorema Completitud Fuerte de *SP*, en lugar de probar el resultado de Compacidad para todo conjunto finitamente satisfacible cualquiera, lo probaremos para todo conjunto maximal finitamente satisfacible. Mediante una estrategia similar a la del Lema de Lindenbaum, mostraremos que todo conjunto finitamente satisfacible Γ es un subconjunto de un conjunto maximal finitamente satisfacible Γ_{Max}. Por ende, si el metateorema vale para estos últimos, valdrá también para cualquier Γ finitamente satisfacible. Y, al igual que antes, los conjuntos maximales tienen ciertas propiedades que nos permitirán realizar la prueba.

Dado un conjunto maximal finitamente satisfacible, la demostración de su satisfacibilidad es también similar a la empleada en el caso de la Completitud Fuerte de *SP*, pero no es exactamente la misma. En la demostración del Lema de Henkin construíamos una ⌜*valuación*⌟ y mostrábamos que esa valuación asignaba 1 a todas las fórmulas del conjunto y sólo a ellas. En este caso, construiremos una *función*⌟ que asigne 1 a todas las fórmulas del conjunto y mostraremos que dicha función es una valuación, que se comporta de acuerdo con la Definición 3.1. El detalle técnico de esto último requiere muchos pasos, pero esencialmente se trata de la misma idea repetida una y otra vez: suponemos que la función definida no se comporta como una valuación y llegamos a la conclusión absurda de que el conjunto maximal debería contener un subconjunto finito no satisfacible, lo cual, por el modo en que fue construido, preservando la satisfacibilidad de sus subconjuntos finitos, es imposible.

Estrategia general de la prueba$_a$*:*

(1) Probaremos que todo conjunto finitamente satisfacible es un subconjunto de un conjunto maximal finitamente satisfacible:

- Enumeraremos primero todas las fórmulas de *P*.
- Definiremos luego una secuencia de conjuntos $S^* = \langle \Gamma_0, \Gamma_1, ... \rangle$, donde $\Gamma_0 = \Gamma$ y cada Γ_n es el resultado de incorporar la expresión numerada por n a Γ_{n-1} si haciéndolo se preserva la satisfacibilidad finita.
- A partir de la unión de todos los conjuntos de la secuencia obtendremos un conjunto Γ_{Max} que probaremos maximal finitamente satisfacible.

(2) Mostraremos que todo conjunto maximal finitamente satisfacible es satisfacible.

- Definiremos una función V que asigna 1 a todos los elementos de Γ_{Max}.
- Probaremos que V es una valuación.

Paso a paso:

(1) Metateorema 5.14. Todo conjunto finitamente satisfacible es un subconjunto de un conjunto maximal finitamente satisfacible.

Estrategia de la prueba:

(a) Utilizando el Metateorema de Enumeración, definimos un conjunto que será una expansión de cualquier conjunto finitamente satisfacible de expresiones, Γ, y que notaremos "Γ_{Max}".[14]

(b) Probamos que Γ_{Max} es maximal finitamente satisfacible.

- Probamos que Γ_{Max} es finitamente satisfacible.
- Mostramos que, para toda fórmula A, o bien $A \in \Gamma_{Max}$ o bien $\Gamma_{Max} \cup \{A\}$ no es finitamente satisfacible.

Prueba:

(a) Sea Γ un conjunto finitamente satisfacible y $S = \langle A_1, A_2, ...\rangle$ la enumeración efectiva de las fórmulas de *P* que presentamos en la prueba del Metateorema de la Enumeración. Sea $S^* = \langle \Gamma_0, \Gamma_1, ..., \Gamma_n, ...\rangle$ una secuencia de conjuntos cada vez más abarcativos tal que:
$\Gamma_0 = \Gamma$.
Si $\Gamma_n \cup \{A_{n+1}\}$ es finitamente satisfacible $\Rightarrow \Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{A_{n+1}\}$.
Si $\Gamma_n \cup \{A_{n+1}\}$ no es finitamente satisfacible $\Rightarrow \Gamma_{n+1} = \Gamma_n$.
Y sea Γ_{Max} la unión de todos los conjuntos de S'.
Por ende, $\Gamma \subseteq \Gamma_{Max}$.

(b) Γ_{Max} es, de acuerdo con la Definición 5.5, maximal finitamente satisfacible, pues:

- Es finitamente satisfacible.
  Sabemos, por el Principio de Inducción Matemática Completa, que, para todo n, Γ_n es finitamente satisfacible:
  - **Paso base:** Queremos ver que Γ_0 es finitamente satisfacible; y lo es, pues es idéntico a Γ.
  - **Paso inductivo:** Queremos ver que si todo Γ_m con $m < k$ es finitamente satisfacible, Γ_k es finitamente satisfacible. Entonces tenemos:
    Hipótesis inductiva: Si $m < k \Rightarrow \Gamma_m$ es finitamente satisfacible.

[14] Siendo Γ_{Max} una expansión de Γ, sabemos que este último está incluido en el primero o, lo que es lo mismo, es un subconjunto del primero.

Tesis inductiva: Γ_k es finitamente satisfacible ($k > 0$, pues este caso ya fue estudiado en el paso base).
Prueba: Existen dos posibilidades, de acuerdo con la definición de cada Γ_n es (a):

- *Caso 1.* $\Gamma_k = \Gamma_{k-1} \cup \{A_k\}$
  $\Rightarrow \Gamma_{k-1} \cup \{A_k\}$ es finitamente satisfacible (Def. Γ_k en (a))
  $\Rightarrow \Gamma_k$ es finitamente satisfacible.
- *Caso 2.* $\Gamma_k = \Gamma_{k-1}$
  $\Rightarrow \Gamma_{k-1}$ es finitamente satisfacible (Hip. ind.)
  $\Rightarrow \Gamma_k$ es finitamente satisfacible.

Luego, en cualquier caso, Γ_k es finitamente satisfacible.

Supongamos pues que Γ_{Max} no es finitamente satisfacible. Luego, uno de sus subconjuntos finitos, Δ, es insatisfacible. Sea A_n la expresión de *P* tal que su numeral, n, es el mayor de los numerales de las fórmulas de Δ (que existe pues Δ es finito). Luego, $\Delta \subseteq \Gamma_n$ y, por tanto, Γ_n no es finitamente satisfacible, lo cual es un absurdo, pues hemos probado lo contrario. El absurdo partió de suponer que Γ_{Max} no es finitamente satisfacible. En consecuencia, lo es.

- Para toda fórmula A o bien $A \in \Gamma_{Max}$ o bien $\Gamma_{Max} \cup \{A\}$ no es finitamente satisfacible.
  Sea A una fórmula cualquiera y n su posición en S.
  $A \in \Gamma_{Max}$ o $A \notin \Gamma_{Max}$. [1]
  Si $A \notin \Gamma_{Max}$
  $\Rightarrow A_n \notin \Gamma_n$ (Def. Γ_n en (a))
  $\Rightarrow \Gamma_{n-1} \cup \{A_n\}$ no es finitamente satisfacible (Def. Γ_n en (a))
  $\Rightarrow$ existe un $\Delta \subseteq \Gamma_{n-1} \cup \{A_n\}$ finito e insatisfacible (Def. 5.4)
  $\Rightarrow$ existe un $\Delta \subseteq \Gamma_{Max} \cup \{A_n\}$ finito e insatisfacible[15]
  $\Rightarrow$ existe un $\Delta \subseteq \Gamma_{Max} \cup \{A\}$ finito e insatisfacible
  $\Rightarrow \Gamma_{Max} \cup \{A\}$ no es finitamente satisfacible. (Def. 5.4)
  Por tanto, (si $A \notin \Gamma_{Max} \Rightarrow \Gamma_{Max} \cup \{A\}$ no es finitamente satisfacible). [2]
  De [1] y [2] obtenemos que, para toda fórmula A o bien $A \in \Gamma_{Max}$ o bien $\Gamma_{Max} \cup \{A\}$ no es finitamente satisfacible.

$\square$

(2) Metateorema 5.15. Todo conjunto maximal finitamente satisfacible es satisfacible.

[15] Pues $\Gamma_{n-1} \subseteq \Gamma_{Max}$.

Prueba: Sea Γ_{Max} un conjunto maximal finitamente satisfacible y V una función del conjunto de expresiones de *P* en $\{0,1\}$ tal que ($V(A) = 1 \Leftrightarrow A \in \Gamma_{Max}$). V es una valuación pues cumple con las condiciones 1 y 2 de la Definición 3.1:

- Cláusula de la negación: $V(\neg A) = 1 \Leftrightarrow V(A) = 0$.

$\Rightarrow$) Supongamos por absurdo que $V(\neg A) = 1$ y $V(A) = 1$
$\Rightarrow \neg A \in \Gamma_{max}$ y $A \in \Gamma_{max}$ (Def. V)
$\Rightarrow \{\neg A, A\} \subseteq \Gamma_{max}$
$\Rightarrow \{\neg A, A\}$ es satisfacible (Def. 5.5)
$\Rightarrow$ existe una valuación V' tal que $V'(\neg A) = 1$ y $V'(A) = 1$ (Def. 3.3)
$\Rightarrow$ existe una valuación V' tal que $V'(A) = 0$ y $V'(A) = 1$ (Def. 3.1, 1)
Hemos llegado a un absurdo, pues V' es una función, de acuerdo con la Definición 3.1. El absurdo partió de suponer que $V(\neg A) = 1$ y $V(A) = 1$. Luego, $V(\neg A) = 1 \Rightarrow V(A) = 0$.[16] [1]

$\Leftarrow$) Supongamos por absurdo que $V(\neg A) = 0$ y $V(A) = 0$
$\Rightarrow \neg A \notin \Gamma_{max}$ y $A \notin \Gamma_{max}$ (Def. V)
$\Rightarrow \Gamma_{Max} \cup \{A\}$ y $\Gamma_{Max} \cup \{\neg A\}$ no son finitamente satisfacibles (Def. 5.5)
$\Rightarrow$ existen dos conjuntos finitos e insatisfacibles Δ y Δ' tales que$\Delta \subseteq \Gamma_{Max} \cup \{A\}$ y $\Delta' \subseteq \Gamma_{Max} \cup \{\neg A\}$ (Def. 5.4)
$\Rightarrow \Gamma_{Max} \cup \{A\}$ y $\Gamma_{Max} \cup \{\neg A\}$ son insatisfacibles (Ejer. 3.1.11)
$\Rightarrow \Gamma_{Max} \cup \{A\}$ y $\Gamma_{Max} \cup \{\neg A\}$ son inconsistentes (Henkin)[17]
$\rightarrow$ existen dos fórmulas B y C tales que $\Gamma_{Max} \cup \{A\} \vdash B$ y $\Gamma_{Max} \cup \{A\} \vdash \neg B$ y $\Gamma_{Max} \cup \{\neg A\} \vdash C$ y $\Gamma_{Max} \cup \{\neg A\} \vdash \neg C$ (Def. 4.6)
$\rightarrow$ existen dos fórmulas B y C tales que $\Gamma_{Max} \vdash (A \rightarrow B)$ y $\Gamma_{Max} \vdash (A \rightarrow \neg B)$ y $\Gamma_{Max} \vdash (\neg A \rightarrow C)$ y $\Gamma_{Max} \vdash (\neg A \rightarrow \neg C)$ (Deducción)
La siguiente es una derivación de $\neg A$ a partir de Γ_{Max}:
1. $(A \rightarrow B)$
2. $(A \rightarrow \neg B)$
3. $((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A))$ (Ejer. 4.1.15)
4. $((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$ *MP* 1, 3
5. $\neg A$ *MP* 2, 4

La siguiente es una derivación de A a partir de Γ_{Max}:

[16] Pues un condicional es verdadero siempre y cuando no tenga antecedente verdadero y consecuente falso.
[17] Contrarrecíproco, en verdad.

1. $(\neg A \to C)$
2. $(\neg A \to \neg C)$
3. $((\neg A \to C) \to ((\neg A \to \neg C) \to \neg\neg A))$ (Ejer. 4.1.15)
4. $((\neg A \to \neg C) \to \neg\neg A)$ *MP* 1, 3
5. $\neg\neg A$ *MP* 2, 4
6. $(\neg\neg A \to A)$ (Ejer. 4.1.5)
7. A *MP* 5, 6

Sea Δ^* es conjunto de miembros de Γ_{Max} empleados en ambas derivaciones.
$\to \Delta^* \subseteq \Gamma_{Max}$ es finito y $\Delta^* \vdash \neg A$ y $\Delta^* \vdash A$. (Def. 4.5)
$\to \Delta^* \subseteq \Gamma_{Max}$ es finito y $\Delta^* \vDash \neg A$ y $\Delta^* \vDash A$. (Corrección Fuerte)
$\to \Delta^* \subseteq \Gamma_{Max}$ es finito y, para toda valuación V', ($V'(\Delta) = 1 \Rightarrow V'(A) = 1$ y $V'(\neg A) = 1$) (Def. 3.5)
Supongamos que existe una valuación V' tal que $V'(\Delta) = 1$
$\Rightarrow V'(A) = 1$ y $V'(\neg A) = 1$
$\Rightarrow V'(A) = 1$ y $V'(A) = 0$ (Def. 3.1, 1)
Lo cual es un absurdo, porque V', al ser una valuación, es una función, de acuerdo con la Definición 3.1. No puede asignar dos valores a una misma fórmula. El absurdo partió de suponer que $V(\neg A) = 0$ y $V(A) = 0$. Luego, $V(A) = 0 \Rightarrow V(\neg A) = 1$. [2]

De [1] y [2], $V(\neg A) = 1 \Leftrightarrow V(A) = 0$.

- Cláusula del condicional: $V(A \to B) = 1 \Leftrightarrow V(A) = 0$ o $V(B) = 1$.

$\Rightarrow$) Si $V(A \to B) = 1$
$\Rightarrow (A \to B) \in \Gamma_{Max}$. (Def. V)
Supongamos por absurdo que ni $V(A) = 0$ ni $V(B) = 1$
$\Rightarrow V(A) = 1$ y $V(B) = 0$
$\Rightarrow A \in \Gamma_{Max}$ y $B \notin \Gamma_{Max}$ (Def. V)
$\Rightarrow A \in \Gamma_{Max}$ y $\neg B \in \Gamma_{Max}$ (Cláusula de la neg.)
$\Rightarrow \{(A \to B), A, \neg B\} \subseteq \Gamma_{Max}$
$\Rightarrow$ como $\{(A \to B), A, \neg B\}$ es finito, es satisfacible (Def. 5.4)
$\Rightarrow$ existe una valuación V' tal que $V'(A \to B) = 1$ y $V'(A) = 1$ y $V'(\neg B) = 1$ (Def. 3.3)
$\Rightarrow$ existe una valuación V' tal que ($V'(A) = 0$ o $V'(B) = 1$) y $V'(A) = 1$ y $V'(B) = 0$. (Def. 3.1, 2)
Pero una valuación tal no puede existir, pues debería asignar o bien 1 y 0 a A o bien 1 y 0 a B, lo cual contradice la Definición 3.1. Hemos llegado a un absurdo, que partió de suponer que $V(A) = 1$ y $V(B) = 0$. Luego, $V(A) = 0$ o $V(B) = 1$.

$\Leftarrow$) Si $V(A) = 0$ o $V(B) = 1$

$\Rightarrow V(\neg A) = 1$ o $V(B) = 1$ (Cláusula de la neg.)
$\Rightarrow \neg A \in \Gamma_{Max}$ o $B \in \Gamma_{Max}$. [3] (Def. V)
Hay entonces dos caminos:

- *Caso 1.* Si $\neg A \in \Gamma_{Max}$ y suponemos por absurdo que $V(A \to B) = 0$
  $\Rightarrow \neg A \in \Gamma_{Max}$ y $V(\neg(A \to B)) = 1$ (Cláusula de la neg.)
  $\Rightarrow \neg A \in \Gamma_{Max}$ y $\neg(A \to B) \in \Gamma_{Max}$ (Def. V)
  $\Rightarrow \{\neg(A \to B), \neg A\} \subseteq \Gamma_{max}$
  $\Rightarrow$ como $\{\neg(A \to B), \neg A\}$ es finito, es satisfacible (Def. 5.4)
  $\Rightarrow$ existe una valuación V' tal que $V'(\neg(A \to B)) = 1$ y $V'(\neg A) = 1$ (Def. 3.3)
  $\Rightarrow$ existe una valuación V' tal que $V'(A \to B) = 0$ y $V'(A) = 0$ (Def. 3.1, 1)
  $\Rightarrow$ existe una valuación V' tal que $V'(A) = 1$ y $V'(B) = 0$ y $V'(A) = 0$. (Def. 3.1, 2)
  Hemos llegado a un absurdo, que partió de suponer que $V(A \to B) = 0$. Luego, $V(A \to B) = 1$. [4]
- *Caso 2.* Supongamos que $B \in \Gamma_{Max}$ y por absurdo que $V(A \to B) = 0$
  $\Rightarrow B \in \Gamma_{Max}$ y $V(\neg(A \to B)) = 1$ (Cláusula de la neg.)
  $\Rightarrow B \in \Gamma_{Max}$ y $\neg(A \to B) \in \Gamma_{Max}$ (Def. V)
  $\Rightarrow \{\neg(A \to B), B\} \subseteq \Gamma_{Max}$
  $\Rightarrow$ como $\{\neg(A \to B), B\}$ es finito, es satisfacible (Def. 5.4)
  $\Rightarrow$ existe una valuación V' tal que $V'(\neg(A \to B)) = 1$ y $V'(B) = 1$ (Def. 3.3)
  $\Rightarrow$ existe una valuación V' tal que $V'(A \to B) = 0$ y $V'(B) = 1$ (Def. 3.1, 1)
  $\Rightarrow$ existe una valuación V' tal que $V'(A) = 1$ y $V'(B) = 0$ y $V'(B) = 1$. (Def. 3.1, 2)
  Hemos llegado a un absurdo nuevamente; no puede existir, de acuerdo con la Definición 3.1, una valuación que asigne 0 y 1 a una fórmula B al mismo tiempo. El absurdo partió de suponer que $V(A \to B) = 0$. Luego, $V(A \to B) = 1$. [5]

De [3], [4] y [5] tenemos que $V(A \to B) = 1$. En cualquier caso, de suponer que $V(A) = 0$ o $V(B) = 1 \Rightarrow V(A \to B) = 1$.

Por lo tanto, $V(A \to B) = 1 \Leftrightarrow V(A) = 0$ o $V(B) = 1$.

Las dos cláusulas, gracias a la Definición 3.1, muestran que V es una valuación. Y, por la Definición 3.3, sabemos que Γ_{Max} es satisfacible. $\square$

Metateorema 5.16. Compacidad. Si $\Gamma \vDash A \Rightarrow$ existe un conjunto $\Delta \subseteq \Gamma$, finito, tal que $\Delta \vDash A$.

Prueba$_a$: Supongamos que $\Gamma \vDash A$ y, por absurdo, que ningún $\Delta \subseteq \Gamma$ finito es tal que $\Delta \vDash A$

$\Rightarrow$ ningún $\Delta \subseteq \Gamma$ finito es tal que $\Delta \cup \{\neg A\}$ es insatisfacible (Ejer. 3.1.11)[18]

$\Rightarrow$ ningún $\Delta' \subseteq \Gamma \cup \{\neg A\}$ finito es tal que Δ' es insatisfacible[19]

$\Rightarrow$ todo $\Delta' \subseteq \Gamma \cup \{\neg A\}$ finito es tal que Δ' es satisfacible

$\Rightarrow \Gamma \cup \{\neg A\}$ es finitamente satisfacible (Def. 5.4)

$\Rightarrow$ existe un conjunto maximal finitamente satisfacible $\Gamma \cup \{\neg A\}_{Max}$ tal que $\Gamma \cup \{\neg A\} \subseteq \Gamma \cup \{\neg A\}_{Max}$ (Met. 5.14)

$\Rightarrow$ existe un conjunto satisfacible $\Gamma \cup \{\neg A\}_{Max}$ tal que $\Gamma \cup \{\neg A\} \subseteq \Gamma \cup \{\neg A\}_{Max}$ (Met. 5.15)

$\Rightarrow \Gamma \cup \{\neg A\}$ es satisfacible (Ejer. 3.1.10)

$\Rightarrow \Gamma \nvDash A$. (Met. 5.3)

Lo cual es un absurdo, pues partimos de que $\Gamma \vDash A$. El absurdo surgió de suponer que no existe subconjunto finito Δ de Γ tal que $\Delta \vDash A$. Luego, sí existe. □

Prueba$_b$: Si $\Gamma \vDash A$

$\Rightarrow \Gamma \vdash A$ (Completitud Fuerte)

$\Rightarrow$ existe un conjunto $\Delta \subseteq \Gamma$ finito tal que $\Delta \vdash A$ (Finitud)

$\Rightarrow$ existe un conjunto $\Delta \subseteq \Gamma$ finito tal que $\Delta \vDash A$. (Corrección Fuerte) □

La propiedad que presentaremos a continuación es, como mencionamos en la introducción, la única que no se aplica a la Lógica de Predicados.[20] Para introducirla recurriremos al concepto de método efectivo que hemos presentado en la Definición 5.2 anteriormente en este capítulo.

Definición 5.6. Un sistema es *decidible* si y sólo si existe un método efectivo para determinar si una fórmula dada es o no es un teorema.

[18] En realidad, el contrarrecíproco de aquel enunciado.

[19] Pues todos los subconjuntos finitos de $\Gamma \cup \{\neg A\}$ que contienen $\neg A$ se pueden obtener mediante la unión de un subconjunto finito Δ de Γ con $\{\neg A\}$ y, como dijimos, son satisfacibles. Aquellos, en cambio, que no contienen $\neg A$, notémoslos 'Δ^*', son subconjuntos de los primeros, de $\Delta^* \cup \{\neg A\}$. Luego, por el Ejercicio 3.1.10, son asimismo satisfacibles.

[20] Aunque sí lo hace a algunos fragmentos de ella, como, por ejemplo, el que contiene solamente predicados monádicos. Para una exposición detallada del asunto, véase Hunter [5], parágrafo 50.

La prueba de que *SP* es decidible se vuelve muy sencilla a la luz del Metateorema de Completitud. Lo único adicional que necesitamos es el supuesto de que las tablas de verdad constituyen un método efectivo para determinar la tautologicidad de una fórmula, lo cual no parece muy discutible. Cada fórmula tiene un número finito de letras proposicionales y, dado que cada valuación asigna a las letras 0 o 1, las valuaciones relevantes podrán agruparse en una cantidad finita (2^n) de posibilidades, que son las representadas por cada línea de una tabla de verdad. Las instrucciones para determinar el valor de cualquier fórmula compleja en una valuación quedan totalmente especificadas por las reglas para las conectivas, las cláusulas 1 y 2 de la Definición 3.1. Por ende, las tablas de verdad son ejemplos paradigmáticos de procedimientos efectivos.

Metateorema 5.15. DECIDIBILIDAD. *SP* es decidible.

> *Prueba:* Dada una fórmula A cualquiera de *P*, las tablas de verdad son un método efectivo que permite determinar si $\models A$. Además, por el Metateorema 5.12, ($\models A \Leftrightarrow \vdash A$). Luego, las tablas de verdad son un método efectivo para determinar si $\vdash A$ y, por la Definición 5.5, *SP* es decidible.

EJERCICIOS

Ejercicio 5.1. Demuestre que para cualesquiera fórmulas A y B de *P* y cualesquiera conjuntos Γ y Δ de expresiones de este lenguaje:

1. $\models ((A \to B) \to (\neg B \to \neg A))$.
2. $\vdash \neg(A \to A) \Rightarrow \models (A \to A)$.
3. $\{(A \to B), (A \to \neg B)\} \models \neg A$.
4. Si Γ es un conjunto maximal consistente $\Rightarrow$ Γ no es finito.
5. Si Γ y Δ son conjuntos maximales consistentes $\Rightarrow$ o bien $\Gamma = \Delta$ o bien $\Gamma \cup \Delta$ es insatisfacible.
6. Si $\Gamma \models \neg A \Rightarrow \Gamma \cup \{A\}$ es inconsistente.
7. Si $\Gamma \subseteq \Delta \Rightarrow (\Gamma \models A \Rightarrow \Delta \vdash A)$.

8. Si $\Gamma \models A \Rightarrow \Gamma \cup \{\neg A\} \vdash B$.
9. Si Γ es un conjunto maximal consistente y $A \notin \Gamma \Rightarrow (\neg A \to A) \notin \Gamma$.
10. Γ es satisfacible $\Leftrightarrow$ Γ es consistente.
11. Γ es finitamente satisfacible $\Leftrightarrow$ Γ es satisfacible.
12. Γ es un conjunto maximal consistente $\Leftrightarrow$ es maximal finitamente satisfacible.
13. Si no existe $\Delta \subseteq \Gamma$ finito tal que $\Delta \models A \Rightarrow \Gamma \not\models A$.
14. Si Γ es insatisfacible $\Rightarrow$ existe un subconjunto finito de Γ que también lo es.

Ejercicio 5.2. Decida las siguientes afirmaciones para cualesquiera fórmulas A y B de P y cualquier conjunto Γ de expresiones de este lenguaje:

1. Si $\nvdash A$, ¿es posible que $\not\models \neg A$?
2. Si Γ es consistente y $\Gamma \vdash \neg(A \to \neg B)$, ¿es satisfacible el conjunto $\Gamma \cup \{\neg B\}$?
3. Si Γ es satisfacible y $\Gamma \models \neg(A \to B)$, ¿es consistente el conjunto $\Gamma \cup \{A\}$?
4. Si $\Gamma \vdash \neg(A \to \neg B)$, ¿es cierto que $\Gamma \models A$ y $\Gamma \models B$?

Soluciones

Ejercicio 5.1.

1. $\vdash ((A \to B) \to (\neg B \to \neg A))$ (Ejer. 4.1.9)
   $\Rightarrow \models ((A \to B) \to (\neg B \to \neg A))$. (Corrección) $\square$
2. Si $\vdash \neg(A \to A)$
   $\Rightarrow \vdash (A \to A)$ (Ejer. 4.1.4)
   $\Rightarrow \models (A \to A)$. (Corrección) $\square$
3. $\vdash ((A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A))$ (Ejer. 4.1.15)
   $\Rightarrow \{(A \to B)\} \vdash ((A \to \neg B) \to \neg A)$ (Met. 4.8)
   $\Rightarrow \{(A \to B), (A \to \neg B)\} \vdash \neg A$ (Met.4.8)
   $\Rightarrow \{(A \to B), (A \to \neg B)\} \models \neg A$ (Corrección Fuerte) $\square$

4. Si Γ es un conjunto maximal consistente

   $\Rightarrow$ para toda fórmula A, $A \in \Gamma$ o $\neg A \in \Gamma$ (Met. 5.4)

   $\Rightarrow$ para toda fórmula atómica A, $A \in \Gamma$ o $\neg A \in \Gamma$. [1] (Def. 2.1)

   Supóngase por absurdo que Γ es finito. Sea m el mayor natural tal que p o $\neg p$ seguidas de m comas pertenece a Γ (este natural debe existir pues Γ es finito). Luego, ni p seguida por $m+1$ comas ni su negación están en Γ

   $\Rightarrow$ no es cierto que para toda fórmula atómica A, $A \in \Gamma$ o $\neg A \in \Gamma$. [2]

   De [1] y [2] llegamos a un absurdo, que partió de suponer que Γ era finito. Luego, no lo es. $\square$

5. Si Γ y Δ son conjuntos maximales consistentes

   $\Rightarrow$ o bien $\Gamma = \Delta$ o bien $\Gamma \neq \Delta$. [1]

   Si $\Gamma \neq \Delta$

   $\Rightarrow$ existe una fórmula A tal que $A \in \Gamma$ y $A \notin \Delta$[21]

   $\Rightarrow$ existe una fórmula A tal que $A \in \Gamma$ y $\neg A \in \Delta$ (Met. 5.4)

   $\Rightarrow$ existe una fórmula A tal que $A \in \Gamma \cup \Delta$ y $\neg A \in \Gamma \cup \Delta$[22]

   $\Rightarrow$ existe una fórmula A tal que $\Gamma \cup \Delta \vdash A$ y $\Gamma \cup \Delta \vdash \neg A$ (Ejer. 4.1.17)

   $\Rightarrow$ existe una fórmula A tal que $\Gamma \cup \Delta \vDash A$ y $\Gamma \cup \Delta \vDash \neg A$. (Corrección Fuerte)

   Supongamos por absurdo que existe una valuación V tal que $V(\Gamma \cup \Delta) = 1$

   $\Rightarrow V(A) = 1$ y $V(\neg A) = 1$ (Def. 3.5)

   $\Rightarrow V(A) = 1$ y $V(A) = 0$. (Def. 3.1, 1)

   Lo cual es imposible, porque V es una función, de acuerdo con la Definición 3.1. El absurdo partió de suponer que existía una valuación V tal que $V(\Gamma \cup \Delta) = 1$. Luego, no existe

   $\Rightarrow \Gamma \cup \Delta$ es insatisfacible (Def. 3.3)

   Por tanto, si $\Gamma \neq \Delta \Rightarrow \Gamma \cup \Delta$ es insatisfacible. [2]

[21] Dos observaciones. Primero, dado que los conjuntos son entidades extensionales, si son diferentes es porque sus elementos no coinciden. Luego, debe haber al menos una fórmula (pues aquí se trata de conjuntos de expresiones de *P*) que pertenezca a uno de ellos y no al otro. Segundo, dado que no sabemos nada de Γ ni de Δ podemos, sin pérdida de generalidad, decir que el elemento que genera la diferencia está en Γ y no en Δ. Bien podríamos hacerlo a la inversa, y la prueba discurriría exactamente igual.

[22] Si algo es miembro de un conjunto entonces es miembro de ese conjunto en unión con cualquier otro, pues la unión es la suma de elementos de los conjuntos que se unen.

De [1] y [2] tenemos que o bien $\Gamma = \Delta$ o bien $\Gamma \cup \Delta$ es insatisfacible.[23] $\square$

6. Si $\Gamma \vDash \neg A$
   $\Rightarrow \Gamma \vdash \neg A$ (Completitud Fuerte)
   $\Rightarrow \Gamma \cup \{A\} \vdash \neg A$ y $\Gamma \cup \{A\} \vdash A$ (Met. 4.2 y Ejer. 4.1.17)
   $\Rightarrow \Gamma \cup \{A\}$ es inconsistente. (Def. 4.6) $\square$

7. Si $\Gamma \subseteq \Delta$
   $\Rightarrow \Gamma \cup \Delta = \Delta$. [1]
   Supongamos pues que $\Gamma \vDash A$
   $\Rightarrow \Gamma \vdash A$ (Completitud Fuerte)
   $\Rightarrow \Gamma \cup \Delta \vdash A$ (Met. 4.2)
   $\Rightarrow \Delta \vdash A$. ([1]) $\square$

8. Si $\Gamma \vDash A$
   $\Rightarrow$ no existe una valuación V tal que $V(\Gamma) = 1$ y $V(A) = 0$ (Def. 3.5)
   $\Rightarrow$ no existe una valuación V tal que $V(\Gamma) = 1$ y $V(\neg A) = 1$ (Def. 3.1, 1)
   $\Rightarrow$ no existe una valuación V tal que $V(\Gamma \cup \{\neg A\}) = 1$
   $\Rightarrow$ no existe una valuación V tal que $V(\Gamma \cup \{\neg A\}) = 1$ y $V(B) = 0$
   $\Rightarrow \Gamma \cup \{\neg A\} \vDash B$ (Def. 3.5)
   $\Rightarrow \Gamma \cup \{\neg A\} \vdash B$. (Corrección Fuerte) $\square$

9. Si Γ es un conjunto maximal consistente y $A \notin \Gamma$
   $\Rightarrow \Gamma$ es consistente y $\neg A \in \Gamma$ (Def. 5.1 y Met. 5.4)[24]
   $\Rightarrow \Gamma$ es consistente y $\Gamma \vdash \neg A$. [1] (Ejer. 4.1.17)
   Supongamos por absurdo que $(\neg A \rightarrow A) \in \Gamma$
   $\Rightarrow \Gamma \vdash (\neg A \rightarrow A)$. [2] (Ejer. 4.1.17)
   De [1] y [2] tenemos que $\Gamma \vdash A$. [3] (Met. 4.4)
   De [1] y [3] tenemos que Γ consistente e inconsistente. (Def. 4.6)
   El absurdo partió de suponer que $(\neg A \rightarrow A) \in \Gamma$. Luego, $(\neg A \rightarrow A) \notin \Gamma$. $\square$

[23] Pues, si tenemos dos caminos, $\Gamma = \Delta$ y $\Gamma \neq \Delta$, y uno de ellos, $\Gamma \neq \Delta$, lleva indefectiblemente a algo, en este caso a que $\Gamma \cup \Delta$ es insatisfacible , entonces podemos decir que nos quedan dos opciones: la primera, $\Gamma = \Delta$, y aquello a lo cual es segundo camino lleva, que $\Gamma \cup \Delta$ es insatisfacible.

[24] En realidad, obtenemos que $\neg A \in \Gamma$ aplicando el Silogismo Disyuntivo sobre el enunciado del Metateorema 5.4.

10. Probaremos cada una de las direcciones del bicondicional por separado:

   $\Rightarrow$) Sea Γ un conjunto satisfacible e inconsistente

   $\Rightarrow$ existe una valuación V tal que $V(\Gamma) = 1$ y una fórmula A tal que $\Gamma \vdash A$ y $\Gamma \vdash \neg A$ (Def. 3.3 y Def. 4.6)

   $\Rightarrow$ existe una valuación V tal que $V(\Gamma) = 1$ y una fórmula A tal que $\Gamma \vDash A$ y $\Gamma \vDash \neg A$ (Corrección Fuerte)

   $\Rightarrow$ existe una valuación V tal que $V(\Gamma) = 1$ y una fórmula A tal que, para toda valuación V', si $V'(\Gamma) = 1 \Rightarrow V'(A) = 1$ y $V'(\neg A) = 1$ (Def. 3.5)

   $\Rightarrow$ existe una valuación V y una fórmula A tal que $V(A) = 1$ y $V(\neg A) = 1$

   $\Rightarrow$ existe una valuación V y una fórmula A tal que $V(A) = 1$ y $V(A) = 0$ (Def. 3.1, 1)

   Hemos llegado a un absurdo, pues V es una función de acuerdo con la Definición 3.1 y, por tanto, no puede asignar dos valores a una misma fórmula. El absurdo partió de suponer que es posible que Γ sea satisfacible e inconsistente a la vez. Luego, si Γ es satisfacible $\Rightarrow$ Γ es consistente.

   $\Leftarrow$) Si Γ es consistente $\Rightarrow$ Γ es satisfacible. (Henkin)

   $\square$

11. Probaremos cada una de las direcciones del bicondicional por separado:

   $\Rightarrow$) Γ es finitamente satisfacible

   $\Rightarrow$ existe un conjunto maximal finitamente satisfacible Γ_{Max} tal que $\Gamma \subseteq \Gamma_{Max}$ (Met. 5.14)

   $\Rightarrow$ existe un conjunto satisfacible Γ_{Max} tal que $\Gamma \subseteq \Gamma_{Max}$ (Met. 5.15)

   $\Rightarrow$ Γ es satisfacible. (Ejer. 3.1.10)[25]

   $\Leftarrow$) Supongamos que Γ es satisfacible pero no finitamente satisfacible

   $\Rightarrow$ Γ es satisfacible y existe un $\Delta \subseteq \Gamma$ finito e insatisfacible (Def. 5.4)

   $\Rightarrow$ Γ es satisfacible e insatisfacible. (Ejer. 3.1.10)

   Hemos llegado a un absurdo, que partió de suponer que Γ es satisfacible y no finitamente satisfacible. Luego, si Γ es satisfacible $\Rightarrow$ Γ es finitamente satisfacible.

   $\square$

[25] En realidad, el contrarrecíproco del enunciado de este ejercicio.

12. Γ es un conjunto maximal consistente

    $\Leftrightarrow \Gamma$ es consistente y $(A \in \Gamma$ o existe una fórmula B tal que $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ y $\Gamma \cup \{A\} \vdash \neg B)$ (Def. 5.1)

    $\Leftrightarrow \Gamma$ es consistente y $(A \in \Gamma$ o $\Gamma \cup \{A\}$ es inconsistente) (Def. 4.6)

    $\Leftrightarrow \Gamma$ es consistente y $(A \in \Gamma$ o $\Gamma \cup \{A\}$ es insatisfacible) (Ejer. 5.1.10)

    $\Leftrightarrow \Gamma$ es consistente y $(A \in \Gamma$ o $\Gamma \cup \{A\}$ no es finitamente satisfacible) (Ejer. 5.1.11)

    $\Leftrightarrow \Gamma$ es maximal finitamente satisfacible. (Def. 5.5) $\square$

13. Si no existe $\Delta \subseteq \Gamma$ finito tal que $\Delta \vDash A$

    $\Rightarrow$ no existe $\Delta \subseteq \Gamma$ finito tal que $\Delta \vdash A$ (Corrección Fuerte)

    $\Rightarrow \Gamma \nvdash A$ (Finitud)

    $\Rightarrow \Gamma \nvDash A$. (Completitud Fuerte) $\square$

14. Si Γ es insatisfacible

    $\Rightarrow \Gamma$ no es finitamente satisfacible (Ejer. 5.1.11)

    $\Rightarrow$ existe un $\Delta \subseteq \Gamma$ insatisfacible. (Def. 5.4) $\square$

Ejercicio 5.2.

1. Sí. Como existe una valuación V tal que $V(p') = 0$, sabemos que $\nvDash p'$ (Definición 3.4). Y, por Corrección, que $\nvdash p'$. Pero también existe una valuación V' tal que $V'(p') = 1$ y, por la cláusula 1 de la Definición 3.1, $V'(\neg p') = 0$. Entonces, por la Definición 3.4, $\nvDash \neg p'$. Consiguientemente, sí es posible que para alguna fórmula A suceda que $\nvdash A$ y, al mismo tiempo que $\nvDash \neg A$, pues es posible para p', que es una fórmula, de acuerdo con la Definición 2.1.

2. No. Si Γ es consistente y $\Gamma \vdash \neg(A \to \neg B)$

    $\Rightarrow \Gamma \cup \{\neg B\} \vdash \neg(A \to \neg B)$. (Met. 4.2)

    La siguiente es una derivación de $(A \to \neg B)$ a partir de $\Gamma \cup \{\neg B\}$:

    1. $\neg B$ Miembro de $\Gamma \cup \{\neg B\}$

    2. $(\neg B \to (A \to \neg B))$ Axioma, por SP_1

    3. $(A \to \neg B)$ *MP* 1, 2

    Luego, $\Gamma \cup \{\neg B\} \vdash \neg(A \to \neg B)$ y $\Gamma \cup \{\neg B\} \vdash (A \to \neg B)$

    $\Rightarrow \Gamma \cup \{\neg B\}$ es inconsistente (Def. 4.6)

    $\Rightarrow \Gamma \cup \{\neg B\}$ es insatisfacible. (Ejer. 5.1.10)

3. Sí. Si Γ es satisfacible y $\Gamma \vDash \neg(A \to B)$

   $\Rightarrow$ existe una valuación V tal que $V(\Gamma) = 1$ y, para toda valuación V, si $V(\Gamma) = 1 \Rightarrow V(\neg(A \to B)) = 1$ (Def. 3.3 y Def. 3.5)

   $\Rightarrow$ existe una valuación V tal que $V(\Gamma) = 1$ y $V(\neg(A \to B)) = 1$

   $\Rightarrow$ existe una valuación V tal que $V(\Gamma) = 1$ y $V(A \to B) = 0$ (Def. 3.1, 1)

   $\Rightarrow$ existe una valuación V tal que $V(\Gamma) = 1$ y $V(A) = 1$ y $V(B) = 0$ (Def. 3.1, 2)

   $\Rightarrow$ existe una valuación V tal que $V(\Gamma) = 1$ y $V(A) = 1$

   $\Rightarrow$ existe una valuación V tal que $V(\Gamma \cup \{A\}) = 1$

   $\Rightarrow \Gamma \cup \{A\}$ es satisfacible (Def. 3.3)

   $\Rightarrow \Gamma \cup \{A\}$ es consistente. (Ejer. 5.1.10)

4. Sí. Si $\Gamma \vdash \neg(A \to \neg B)$

   $\Rightarrow \Gamma \vDash \neg(A \to \neg B)$ (Corrección Fuerte)

   $\Rightarrow$ para toda valuación V, si $V(\Gamma) = 1 \Rightarrow V(\neg(A \to \neg B)) = 1$ (Def. 3.5)

   $\Rightarrow$ para toda valuación V, si $V(\Gamma) = 1 \Rightarrow V(A \to \neg B) = 0$ (Def. 3.1, 1)

   $\Rightarrow$ para toda valuación V, si $V(\Gamma) = 1 \Rightarrow V(A) = 1$ y $V(\neg B) = 0$ (Def. 3.1, 2)

   $\Rightarrow$ para toda valuación V, si $V(\Gamma) = 1 \Rightarrow V(A) = 1$ y $V(B) = 1$ (Def. 3.1, 1)

   $\Rightarrow \Gamma \vDash A$ y $\Gamma \vDash B$. (Def. 3.5)

Apéndice

Otro aparato deductivo para la Lógica Proposicional

Ya hemos hablado acerca de las diferentes posibilidades a la hora de dotar a una teoría de un aparato deductivo. Dijimos que, mientras los sistemas axiomáticos como *SP* seleccionan un conjunto mínimo de afirmaciones de las cuales derivar otros enunciados de la teoría, existe otra clase de aparatos deductivos, los sistemas de deducción natural. Estos últimos seleccionan reglas de inferencia como puntos de partida en lugar de afirmaciones. Tal es el sistema deductivo presentado por Gamut (1991) [4], al cual nos referiremos en las líneas subsiguientes mediante las siglas *SG*.

Señalamos en el Capítulo 4 que la elección del sistema axiomático era ventajosa para obtener las propiedades metateóricas del sistema. Y esto es útil no sólo para *SP*, sino también para otros sistemas diferentes. En lugar de demostrar los metateoremas de la manera tediosa que exige un sistema dotado de un aparato de deducción natural, si logramos probar que *SG* y *SP* son equivalentes, podremos extender las propiedades del primero al segundo. Las pruebas en este apéndice serán más informales que las de los capítulos que lo preceden

Definición A.1. Dos sistemas deductivos $S1$ y $S2$ son *equivalentes* si y sólo si, cada vez que en $S1$ pueda derivarse un enunciado A a partir de un conjunto Γ de fórmulas, en $S2$ lo mismo es posible, y viceversa ($S1$ y $S2$ prueban las mismas relaciones de consecuencia sintáctica).

El problema que se presenta es que *SG* y *SP*, si bien comparten gran parte de su vocabulario, no están expresados en el mismo lenguaje. El lenguaje de *SG* tiene otras conectivas aparte de la negación y el condicional material y, con ellas, otras expresiones que son teoremas y no son fórmulas de *P*. ¿Cómo podemos decir entonces que son equivalentes?

Para salvar este escollo, tendremos que mostrar que es posible traducir expresiones de un lenguaje a otro sin pérdida y, por lo tanto, introducir una nueva noción de equivalencia. Pero empecemos presentando el lenguaje de *SG*.

Definición A.2. El *lenguaje de SG*, *G*, es idéntico a *P* con el agregado de dos conectivas lógicas: "$\vee$", para representar la disyunción, y "$\wedge$", para representar la conjunción.

Vale aclarar que Gamut no utiliza comas para diferenciar proposiciones sino que se incorporan letras distintas (p, q, r, etc.). El resultado es que las fórmulas son más legibles y es más práctico para la resolución de ejercicios, pero desde el punto de vista técnico es insuficiente, puesto que sólo contamos con una cantidad finita de símbolos proposicionales. Por ende, conservaremos la notación que venimos utilizando hasta el momento.

Definición A.3. *Fórmula bien formada de* G.

1. p seguido de cualquier número finito de $'$ es una formula de *G*.
2. Si A es una fórmula de *G*, entonces $\neg A$ es también una fórmula de ese lenguaje.
3. Si A y B son fórmulas de *G*, entonces $(A \rightarrow B)$ también lo es.
4. Si A y B son fórmulas de *G*, entonces $(A \vee B)$ también.
5. Si A y B son fórmulas de *G*, entonces $(A \wedge B)$ es asimismo una fórmula de este lenguaje.
6. Ninguna expresión que no pueda obtenerse mediante las cláusulas 1-5 en un número finito de pasos es una fórmula de *G*.

Las fórmulas atómicas de *G* son las mismas que las de *P*. Notemos que las primeras tres cláusulas y la quinta pertenecen también a la definición de fórmula bien formada de *P*, sólo que aquí aparece "*G*" en lugar de "*P*". *G* agrega a *P* únicamente las fórmulas que se pueden formar a partir de las conectivas $\vee$ y $\wedge$, de modo tal que todas las expresiones de *P* son asimismo expresiones suyas.

A continuación presentaremos formalmente el aparato deductivo *SG*, en el cual tenemos una regla de introducción y eliminación para cada conectiva, con el agregado de las reglas "*Ex Falso Sequitur Quodlibet*", la regla de Doble Negación y la regla de Repetición.

Definición A.4. El sistema de deducción natural *SG* consta de las reglas que pueden obtenerse reemplazando uniformemente las letras esquemáticas A, B y C por fórmulas de *G* en las siguientes:

- *Introducción del condicional* ($I_{\rightarrow}$): $(A \rightarrow B)$ es una consecuencia inmediata de suponer A y a partir de ello, empleando reglas de inferencia de *SG*, obtener B, cancelando la suposición de A.
- *Eliminación del condicional* ($E_{\rightarrow}$): B es una consecuencia inmediata de A y $(A \rightarrow B)$.
- *Introducción de la conjunción* ($I_{\wedge}$): $(A \wedge B)$ es una consecuencia inmediata de A y B.
- *Eliminación de la conjunción* ($E_{\wedge}$): Tanto A como B son consecuencias inmediatas de $(A \wedge B)$.
- *Introducción de la disyunción* ($I_{\vee}$): $(A \vee B)$ es una consecuencia inmediata tanto de A como de B.
- *Eliminación de la disyunción* ($E_{\vee}$): C es una consecuencia inmediata de $(A \vee B)$, $(A \rightarrow C)$ y $(B \rightarrow C)$.
- *Eliminación de la negación* ($E_{\neg}$): $\perp$ es una consecuencia inmediata de A y $\neg A$.
- *Introducción de la negación* ($I_{\neg}$): $\neg A$ es una consecuencia inmediata de suponer A y a partir de ello, empleando reglas de inferencia de *SG*, obtener $\perp$, cancelando la suposición de A.
- *Ex Falso Sequitur Quodlibet* (*EFSQ*): Cualquier fórmula A es consecuencia inmediata de $\perp$.
- *Doble Negación* (*DN*): A es una consecuencia inmediata de $\neg\neg A$.
- *Repetición* (*Rep.*): A es una consecuencia inmediata de A.

Las nociones de *demostración* y *derivación* en *SG* son semejantes a las de *SP* pero no idénticas.[26]

Definición A.5. Una *demostración* en *SG* de una fórmula A de *G* es una tira finita de fórmulas de este lenguaje, cada una de las cuales es o bien un supuesto o bien es una consecuencia inmediata de fórmulas anteriores gracias a las reglas de inferencia de *SG*, la última es A, y en la cual todos los supuestos son cancelados por $I_{\rightarrow}$ o por $I_{\neg}$.

[26] Véanse las Definiciones 4.2 y 4.4.

Definición A.6. Una *derivación* en *SG* de una fórmula A de G a partir de un conjunto Γ de expresiones de este lenguaje es una tira finita de fórmulas G, cada una de las cuales es o bien un supuesto o bien es una consecuencia inmediata de fórmulas anteriores gracias a las reglas de inferencia de *SG*, la última es A, y en la cual todos los supuestos que no pertenecen a Γ son cancelados por $I_{\rightarrow}$ o por $I_{\neg}$.

Las nociones de *teorema* y *consecuencia sintáctica* de *SG* son exactamente iguales a las de *SP*.[27] Para indicar que una fórmula A de G es un teorema de *SG* escribimos "$\vdash_{SG} A$", y para indicar que es una consecuencia sintáctica de un conjunto Γ de expresiones de G en este sistema, "$\Gamma \vdash_{SG} A$".

Puesto que hemos extendido el lenguaje P a G, es preciso también que extendamos las cláusulas semánticas, para dar condiciones de verdad de las nuevas expresiones.

Definición A.7. Una valuación$_G$ es una función V_G cuyo dominio es el conjunto de fórmulas de G y su codominio $\{0, 1\}$ y, además, cumple con las mismas condiciones que una valuación[28], con el agregado de las cláusulas correspondientes a las nuevas conectivas:

3. $V_G(A \vee B) = 1 \Leftrightarrow V_G(A) = 1$ o $V_G(B) = 1$.
4. $V_G(A \wedge B) = 1 \Leftrightarrow V_G(A) = 1$ y $V_G(B) = 1$.

Las nociones de *satisfacibilidad*, *tautologicidad o validez lógica* y *consecuencia semántica* para expresiones y conjuntos de expresiones de G son exactamente iguales a las de *P*.[29] Para indicar que una fórmula A de G es lógicamente válida o tautológica escribimos "$\vDash_G A$", y para indicar que es una consecuencia semántica de un conjunto Γ de expresiones de G, "$\Gamma \vDash_G A$".

El truco ahora consiste en notar que las nuevas conectivas se pueden definir a partir de las que ya teníamos. Veamos un ejemplo en el lenguaje natural, para aclarar la cuestión. Imaginemos que tenemos dos ediciones de "La montaña mágica", de Thomas Mann. Una de ellas está en su idioma original y la otra es una traducción al castellano. Entonces nos preguntamos: ¿se trata de la misma novela? Hay un punto de vista desde el que claramente son distintas: las palabras que encontramos en su interior son diferentes, un texto es más largo que el otro. Sin embargo, si en la traducción no hay pérdida de sentido, podemos decir que ambas ediciones son

[27] Véanse las Definiciones 4.3 y 4.5.
[28] Las cláusulas 1 y 2 de la Definición 3.1.
[29] Véanse las Definiciones 3.3, 3.4 y 3.5.

equivalentes. En el lenguaje natural es muy difícil determinar cuándo una traducción es adecuada y cuándo no. En un lenguaje formal no tenemos este problema, ya que el significado de las conectivas está plenamente determinado por su tabla de verdad. Por lo tanto, si encontramos una traducción adecuada de las fórmulas de un lenguaje a las del otro, el problema se reduce a determinar si el conjunto de teoremas de *SP* es una traducción del de *SG*.

Definición A.8. Dos sistemas $S1$ y $S2$ son *β-equivalentes* si y sólo si se cumplen las siguientes dos condiciones:

1. Cada vez que en $S1$ pueda derivarse un enunciado A a partir de un conjunto Γ, la traducción de A en el lenguaje de $S2$ puede derivarse a partir del conjunto dado por la traducción al lenguaje de $S2$ de los miembros de Γ.
2. Siempre que en $S2$ pueda derivarse un enunciado A a partir de un conjunto Γ, también puede efectuarse tal derivación en $S1$.

La traducción de las fórmulas de *G* a las de *P* la realizaremos mediante una función.

Definición A.9. La *Función de Traducción*, $Trad$, es una función cuyo dominio es el conjunto de fórmulas de *G* y su codominio el de las expresiones de *P*, y además cumple con las siguientes condiciones:[30]

1. Si A es una fórmula atómica de *G*, entonces $Trad(A) = A$.
2. $Trad(\neg A) = \neg Trad(A)$.
3. $Trad(A \to B) = (Trad(A) \to Trad(B))$.
4. $Trad(A \vee B) = (\neg Trad(A) \to Trad(B))$.
5. $Trad(A \wedge B) = \neg(Trad(A) \to \neg Trad(B))$.

Si Γ es un conjunto de expresiones de *G*, escribimos "$Trad(\Gamma)$" para notar el conjunto de fórmulas *P* que son la imagen de los miembros de Γ a través de la función $Trad$, esto es, lo que $Trad$ les asigna. Luego, $Trad(\Gamma)$ es el conjunto de expresiones de *P* que son la traducción de los miembros de Γ mediante $Trad$.

Al igual que en el ejemplo de la novela, las fórmulas en uno de los lenguajes (*P*) resultan más extensas y usan diferentes signos que las del otro (*G*). Sin embargo, eso no impide que ambas estén "diciendo lo mismo", como ilustran las siguientes tablas y expresa el Metateorema A.1.

[30] Nótese que los argumentos relevantes son los últimos dos.

	$(A$	$\vee$	$B)$	$\equiv$	$(\neg$	A	$\rightarrow$	$B)$
V_{G1}	1	1	1		0	1	1	1
V_{G2}	1	1	0		0	1	1	0
V_{G3}	0	1	1		1	0	1	1
V_{G4}	0	0	0		1	0	0	0

	$(A$	$\wedge$	$B)$	$\equiv$	$\neg$	$(A$	$\rightarrow$	$\neg$	$B)$
V_{G1}	1	1	1		1	1	0	0	1
V_{G2}	1	0	0		0	1	1	1	0
V_{G3}	0	0	1		0	0	1	0	1
V_{G4}	0	0	0		0	0	1	1	0

Metateorema A.1. Para cualquier expresión A de *G* y cualquier valuación$_G$ V_G, $V_G(Trad(A)) = 1 \Leftrightarrow V_G(A) = 1$.

No probaremos rigurosamente aquí este enunciado sino que lo dejamos como ejercicio. Al final del apéndice puede encontrarse, junto con una de sus resoluciones posibles. Pasemos ahora a la equivalencia entre ambos sistemas.

Metateorema A.2. *SG* y *SP* son β-equivalentes.

Estrategia de la prueba:

(1) Mostraremos que el poder de prueba de *SP* es suficiente para efectuar las mismas derivaciones que *SG*, excepto porque algunas de ellas no serán de las expresiones mismas y a partir de los mismos conjuntos sino de sus traducciones, siguiendo la función $Trad$ presentada en la Definición A.9: para cualquier expresión A y conjunto de expresiones Γ de *G*, si $\Gamma \vdash_{SG} A \Rightarrow Trad(\Gamma) \vdash Trad(A)$.

(2) Probaremos también que el poder de prueba de *SG* es suficiente para realizar las mismas derivaciones que *SP*: para cualquier expresión A y conjunto Γ de expresiones de *P*, si $\Gamma \vdash A \Rightarrow \Gamma \vdash_{SG} A$.

Prueba:

(1) Si volvemos al Ejercicio 4.2, podemos notar que las relaciones de consecuencia sintáctica que probamos allí no son otra cosa que traducciones de reglas de inferencia de *SG* al lenguaje de *SP*. 1-3 son las reglas para la conjunción, 4-6 para la disyunción y 7-10 para la negación. Además, el

Metateorema 4.1 da cuenta de la validez sintáctica en *SP* de la regla de Repetición, y el caso particular del Metateorema de la Deducción en el cual $\Gamma = \phi$, junto con el Metateorema 4.6, de la validez sintáctica de la regla de Introducción del condicional. Finalmente, en la misma definición de *SP*[31] se establece la vigencia de la regla de Eliminación del condicional en *SP*, allí denominada "*Modus Ponens*".

Por ende, mostramos que dichas reglas son también sintácticamente válidas en *SP* (por Corrección, además son semánticamente válidas), lo cual implica que cualquier enunciado A derivable a partir de un conjunto Γ de fórmulas en *SG* tiene una traducción que puede derivarse en *SP* a partir de $Trad(\Gamma)$. Basta con tomar la derivación en *SG* de dicho enunciado a partir de Γ y traducir cada uno de sus pasos. El resultado será una derivación, tal vez abreviada, de $Trad(A)$ a partir de $Trad(\Gamma)$ en *SP*, pues los pasos serán justificables y correctos en *SP*.

(2) Ahora queremos ver que no existe un enunciado A que pueda derivarse en *SP* a partir de un conjunto Γ pero no en *SG*. Para ello, probaremos que los axiomas de *SP* son teoremas de *SG* y que las reglas de inferencia de *SP* lo son asimismo de *SG*. Aquí no necesitamos traducir, puesto que *SG* cuenta con todas las conectivas necesarias; toda expresión de *P* es una expresión de *G*.

(SP_1) La siguiente es una demostración de (SP_1) en *SG*:

1.	A	Supuesto
2.	B	Supuesto
3.	A	*Rep.* 1
4.	$(B \to A)$	$I_{\to}$ 2-3
5.	$(A \to (B \to A))$	$I_{\to}$ 1-4

(SP_2) La siguiente es una demostración de (SP_2) en *SG*:

[31] Definición 4.1.

1.	$((A \to (B \to C))$	Supuesto
2.	$(A \to B)$	Supuesto
3.	A	Supuesto
4.	B	$E_{\to}$ 2, 3
5.	$(B \to C)$	$E_{\to}$ 1, 3
6.	C	$E_{\to}$ 4, 5
7.	$(A \to C)$	$I_{\to}$ 3-6
8.	$((A \to B) \to (A \to C))$	$I_{\to}$ 2-7
9.	$((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$	$I_{\to}$ 1-8

(SP_3) La siguiente es una demostración de (SP_3) en *SG*:

1.	$(\neg A \to \neg B)$	Supuesto
2.	B	Supuesto
3.	$\neg A$	Supuesto
4.	$\neg B$	$E_{\to}$ 1, 3
5.	$\perp$	$E_{\neg}$ 2, 4
6.	$\neg\neg A$	$I_{\neg}$ 3-5
7.	A	*DN* 6
8.	$(B \to A)$	$I_{\to}$ 2-7
9.	$((\neg A \to \neg B) \to (B \to A))$	$I_{\to}$ 1-8

Además, la única regla de inferencia de *SP*, *MP*, es una regla a su vez de *SG*, la regla de Eliminación del condicional. En consecuencia, cualquier derivación de una fórmula A a partir de un conjunto Γ de expresiones de *P* en *SP* puede convertirse en una derivación de ese enunciado a partir de Γ en *SG*, simplemente reemplazando los axiomas por las demostraciones que aquí hemos efectuado.

Consiguientemente, de acuerdo con la Definición A.8, *SG* y *SP* son β-equivalentes.
□

De este modo, podemos afirmar sin más preámbulos que *SG* es Simple y Absolutamente Consistente, Correcto, Completo y Decidible, entre otros resultados verdaderos también de *SP*. Asimismo, estamos en condiciones de ver que *G* es Compacto, sin realizar las tediosas pruebas del Capítulo 5. La propiedad de Finitud para *SG*, en cambio, es sumamente sencilla y últi para agilizar las otras pruebas; de modo que la haremos primeramente sin ayuda de la β-equivalencia entre *SG* y *SP*.

Metateorema A.3. Finitud de *SG*. Para cualquier conjunto Γ de expresiones de *G* y cualquier enunciado A de ese lenguaje, si $\Gamma \vdash_{SG} A \Rightarrow$ existe un conjunto $\Delta \subseteq \Gamma$, finito, tal que $\Delta \vdash_{SG} A$.

Prueba: Si $\Gamma \vdash_{SG} A$

$\Rightarrow$ existe una derivación en *SG* de A a partir de Γ

$\Rightarrow$ existe una tira finita de fórmulas de *G*, cada una de las cuales es o bien un supuesto o bien es una consecuencia inmediata de fórmulas anteriores gracias a las reglas de inferencia de *SG*, A es la última, y en la tira todos los supuestos que no pertenecen a Γ son cancelados por $I_{\rightarrow}$ o por $I_{\neg}$. (Def. A.6)

Dado que los supuestos dan lugar a fórmulas en la tira, no pueden ser infinitos, pues la tira lo sería. Sea Δ el conjunto de supuestos no cancelados de la tira. Luego, Δ es finito y como todos los supuestos no cancelados son miembros de Γ, $\Delta \subseteq \Gamma$. En consecuencia, la tira es tal que cada una de sus fórmulas es o bien un supuesto o bien una consecuencia inmediata de fórmulas anteriores gracias a las reglas de inferencia de *SG*, A es su último miembro, y todos sus supuestos no cancelados por $I_{\rightarrow}$ o por $I_{\neg}$ pertenecen a Δ

$\Rightarrow$ existe una derivación en *SG* de A a partir de Δ (Def. 6.A)

$\Rightarrow \Delta \vdash_{SG} A$. □

La demostración de los siguientes resultados metateóricos la proponemos como ejercicio. La idea es facilitar sus pruebas empleando la β-equivalencia entre *SG* y *SP*. Para cada uno de ellos damos al final del apéndice una posible solución.

Metateorema A.4. Consistencia Simple de *SG*. *SG* es simplemente consistente.

Metateorema A.5. Consistencia Absoluta de *SG*. *SG* es absolutamente consistente.

Metateorema A.6. Corrección Fuerte de *SG*. Para cualquier conjunto Γ de expresiones de *G* y cualquier enunciado A de ese lenguaje, si $\Gamma \vdash_{SG} A \Rightarrow \Gamma \vDash_G A$.

Metateorema A.7. Corrección de *SG*. Para cualquier enunciado A de *G*, si $\vdash_{SG} A \Rightarrow \vDash_G A$.

Metateorema A.8. Completitud Fuerte de *SG*. Para cualquier conjunto Γ de expresiones de *G* y cualquier enunciado A de ese lenguaje, si $\Gamma \vDash_G A \Rightarrow \Gamma \vdash_{SG} A$.

Metateorema A.9. Completitud de *SG*. Para cualquier enunciado A de G, si $\models_G A \Rightarrow \vdash_{SG} A$.

Metateorema A.10. Compacidad de *G*. Para cualquier conjunto Γ de expresiones de G y cualquier enunciado A de ese lenguaje, si $\Gamma \models_G A \Rightarrow$ existe un conjunto $\Delta \subseteq \Gamma$, finito, tal que $\Delta \models_G A$.

Metateorema A.11. Decidibilidad de *SG*. *SG* es decidible.

Ejercicios

Ejercicio A.1. Demuestre los siguientes metateoremas sin utilizar resultados que sean posteriores a su presentación en el cuerpo del apéndice:

1. Metateorema A.1.[32]
2. Para cualquier expresión A de G, $\vdash_{SG} (Trad(A) \rightarrow A)$ y $\vdash_{SG} (A \rightarrow Trad(A))$.
3. Si para alguna expresión A y conjunto de expresiones Γ de G $Trad(\Gamma) \vdash Trad(A) \Rightarrow \Gamma \vdash_{SG} A$.
4. Metateorema A.4.
5. Metateorema A.5.
6. Metateorema A.6.
7. Metateorema A.7.
8. Metateorema A.8.
9. Metateorema A.9.
10. Metateorema A.10.
11. Metateorema A.11.

[32] Pista: aplique el Principio de Inducción Matemática sobre el número de conectivas de A.

Soluciones

Ejercicio A.1.

1. *Prueba:* Sabemos por el Principio de Inducción Matemática Completa que, para todo n natural, si el número de conectivas de A es n, para toda valuación$_G$ V_G, $V_G(Trad(A)) = 1 \Leftrightarrow V_G(A) = 1$:

   - **Paso base:** Queremos ver que si A cuenta con 0 conectivas, $V_G(Trad(A)) = 1 \Leftrightarrow V_G(A) = 1$, lo cual es cierto porque si A carece de conectivas es una fórmula atómica y, de acuerdo con la cláusula 1 de la Definición A.9, $Trad(A) = A$.
   - **Paso inductivo:** Queremos ver que si cualquier fórmula B con menos de k conectivas es tal que, para toda valuación$_G$ V_G, $V_G(Trad(B)) = 1 \Leftrightarrow V_G(B) = 1$, toda fórmula A con exactamente k conectivas es también tal que ($V_G(Trad(A)) = 1 \Leftrightarrow V_G(A) = 1$) para toda valuación$_G$ V_G. Entonces tenemos:

     Hipótesis inductiva: Si B tiene menos de k conectivas ($k > 0$, pues este caso ya fue analizado en el paso base) $\Rightarrow$ ($V_G(Trad(B)) = 1 \Leftrightarrow V_G(B) = 1$).

     Tesis inductiva: Si A tiene exactamente k conectivas $\Rightarrow$ ($V_G(Trad(A)) = 1 \Leftrightarrow V_G(A) = 1$).

     Prueba: Sea A una expresión de G con exactamente k conectivas. Existen cuatro posibilidades, de acuerdo con la Definición A.3:

     - *Caso 1.* $A \equiv \neg B$
       $\Rightarrow (V_G(Trad(B)) = 1 \Leftrightarrow V_G(B) = 1)$ (Hip. ind.)
       $\Rightarrow (V_G(\neg Trad(B)) = 0 \Leftrightarrow V_G(\neg B) = 0)$ (Def. A.7, 1)
       $\Rightarrow (V_G(Trad(\neg B)) = 0 \Leftrightarrow V_G(\neg B) = 0)$ (Def. A.9, 2)
       $\Rightarrow (V_G(Trad(\neg B)) = 1 \Leftrightarrow V_G(\neg B) = 1)$ (Def. A.7, 1)
       $\Rightarrow (V_G(Trad(A)) = 1 \Leftrightarrow V_G(A) = 1)$.
     - *Caso 2.* $A \equiv (B \to C)$.
       $V_G(Trad(A)) = 1$
       $\Leftrightarrow V_G(Trad(B \to C)) = 1$
       $\Leftrightarrow V_G(Trad(B) \to Trad(C)) = 1$ (Def. A.9, 3)
       $\Leftrightarrow V_G(Trad(B)) = 0$ o $V_G(Trad(C)) = 1$ (Def. A.7, 2)
       $\Leftrightarrow V_G(B) = 0$ o $V_G(C) = 1$ (Hip. Ind.)
       $\Leftrightarrow V_G(B \to C) = 1$ (Def. A.7, 2)
       $\Leftrightarrow V_G(A) = 1$.

- *Caso 3.* $A \equiv (B \vee C)$.
  $V_G(Trad(A)) = 1$
  $\Leftrightarrow V_G(Trad(B \vee C)) = 1$
  $\Leftrightarrow V_G(Trad(B) \vee Trad(C)) = 1$ (Def. A.9, 4)
  $\Leftrightarrow V_G(Trad(B)) = 1$ o $V_G(Trad(C)) = 1$ (Def. A.7, 3)
  $\Leftrightarrow V_G(B) = 1$ o $V_G(C) = 1$ (Hip. Ind.)
  $\Leftrightarrow V_G(B \vee C) = 1$ (Def. A.7, 3)
  $\Leftrightarrow V_G(A) = 1$.
- *Caso 4.* $A \equiv (B \wedge C)$.
  $V_G(Trad(A)) = 1$
  $\Leftrightarrow V_G(Trad(B \wedge C)) = 1$
  $\Leftrightarrow V_G(Trad(B) \wedge Trad(C)) = 1$ (Def. A.9, 5)
  $\Leftrightarrow V_G(Trad(B)) = 1$ y $V_G(Trad(C)) = 1$ (Def. A.7, 4)
  $\Leftrightarrow V_G(B) = 1$ y $V_G(C) = 1$ (Hip. Ind.)
  $\Leftrightarrow V_G(B \wedge C) = 1$ (Def. A.7, 4)
  $\Leftrightarrow V_G(A) = 1$.

Luego, en virtud de la Definición A.3,[33] para cualquier expresión A de G, $V_G(Trad(A)) = 1 \Leftrightarrow V_G(A) = 1$. □

2. Probaremos utilizando el Principio de Inducción Matemática Completa que para cualquier n natural, si A tiene n conectivas, $\vdash_{SG} (Trad(A) \to A)$ y $\vdash_{SG} (A \to Trad(A))$.

   - **Paso base:** Queremos ver que si A cuenta con 0 conectivas, $\vdash_{SG} (Trad(A) \to A)$ y $\vdash_{SG} (A \to Trad(A))$.
     Si A carece de conectivas
     $\Rightarrow A$ es una fórmula atómica (Def. A.3)
     $\Rightarrow Trad(A) = A$ (Def. A.9, 1)
     $\Rightarrow$ la siguiente es, de acuerdo con la Definición A.5, una demostración de $(Trad(A) \to A)$ y de $(A \to Trad(A))$ en *SG*:

1.	$Trad(A)$	Supuesto
2.	A	*Rep.*
3.	$(Trad(A) \to A)$	$I_{\to}$ 1-2

   - **Paso inductivo:** Queremos ver que si cualquier fórmula B con menos de k conectivas es tal que $\vdash_{SG} (Trad(B) \to B)$ y $\vdash_{SG} (B \to Trad(B))$, toda fórmula A con exactamente k conectivas es también

[33] Que indica que toda fórmula de G sólo puede tener un número natural de conectivas.

tal que $\vdash_{SG} (Trad(A) \to A)$ y $\vdash_{SG} (A \to Trad(A))$. Entonces tenemos:

Hipótesis inductiva: Si B tiene menos de k conectivas ($k > 0$, pues este caso ya fue analizado en el paso base) $\Rightarrow \vdash_{SG} (Trad(B) \to B)$ y $\vdash_{SG} (B \to Trad(B))$.

Tesis inductiva: Si A tiene exactamente k conectivas $\Rightarrow \vdash_{SG} (Trad(A) \to A)$ y $\vdash_{SG} (A \to Trad(A))$.

Prueba: Sea A una expresión de *G* con exactamente k conectivas. Existen cuatro posibilidades, de acuerdo con la Definición A.3:

- *Caso 1.* $A \equiv \neg B$
  $\Rightarrow \vdash_{SG} (Trad(B) \to B)$ y $\vdash_{SG} (B \to Trad(B))$ (Hip. ind.)
  $\Rightarrow \vdash_{SG} (\neg B \to \neg Trad(B))$ y $\vdash_{SG} (\neg Trad(B) \to \neg B)$ (SP_3 y $E_{\to}$)[34]
  $\Rightarrow \vdash_{SG} (\neg B \to Trad(\neg B))$ y $\vdash_{SG} (Trad(\neg B) \to \neg B)$ (Def. A.9, 2)
  $\Rightarrow \vdash_{SG} (A \to Trad(A))$ y $\vdash_{SG} (Trad(A) \to A)$.
- *Caso 2.* $A \equiv (B \to C)$
  $\Rightarrow \vdash_{SG} (Trad(B) \to B)$ y $\vdash_{SG} (B \to Trad(B))$ y $\vdash_{SG} (Trad(C) \to C)$ y $\vdash_{SG} (C \to Trad(C))$ (Hip. ind.)
  $\Rightarrow$ la siguiente es una demostración de $((B \to C) \to (Trad(B) \to Trad(C)))$ en *SG*:

1.	$(Trad(B) \to B)$	
2.	$(C \to Trad(C))$	
3.	$(B \to C)$	Supuesto
4.	$Trad(B)$	Supuesto
5.	B	$E_{\to}$ 1, 4
6.	C	$E_{\to}$ 3, 5
7.	$Trad(C)$	$E_{\to}$ 2, 6
8.	$(Trad(B) \to Trad(C))$	$I_{\to}$ 4-7
9.	$((B \to C) \to (Trad(B) \to Trad(C)))$	$I_{\to}$ 3-8

y la siguiente una demostración de $((Trad(B) \to Trad(C)) \to (B \to C))$ en *SG*:

[34] Véase la prueba del Met A.2.

1.	$(B \to Trad(B))$	
2.	$(Trad(C) \to C)$	
3.	$(Trad(B) \to Trad(C))$	Supuesto
4.	B	Supuesto
5.	$Trad(B)$	$E_{\to}$ 1, 4
6.	$Trad(C)$	$E_{\to}$ 3, 5
7.	C	$E_{\to}$ 2, 6
8.	$B \to C)$	$I_{\to}$ 4-7
9.	$((Trad(B) \to Trad(C)) \to (B \to C))$	$I_{\to}$ 3-8

$\Rightarrow \vdash_{SG} ((B \to C) \to (Trad(B) \to Trad(C)))$ y $\vdash_{SG} ((Trad(B) \to Trad(C)) \to (B \to C))$
$\Rightarrow \vdash_{SG} ((B \to C) \to Trad(B \to C))$ y $\vdash_{SG} (Trad(B \to C) \to (B \to C))$ (Def. A.9, 3)
$\Rightarrow \vdash_{SG} (A \to Trad(A))$ y $\vdash_{SG} (Trad(A) \to A)$.

- *Caso 3.* $A \equiv (B \vee C)$
$\Rightarrow \vdash_{SG} (Trad(B) \to B)$ y $\vdash_{SG} (B \to Trad(B))$ y $\vdash_{SG} (Trad(C) \to C)$ y $\vdash_{SG} (C \to Trad(C))$ (Hip. ind.)
$\Rightarrow$ la siguiente es una demostración de $((B \vee C) \to (Trad(B) \vee Trad(C)))$ en *SG*:

1.	$(B \to Trad(B))$	
2.	$(C \to Trad(C))$	
3.	$(B \vee C)$	Supuesto
4.	B	Supuesto
5.	$Trad(B)$	$E_{\to}$ 1, 4
6.	$(Trad(B) \vee Trad(C))$	$I_{\vee}$ 5
7.	$(B \to (Trad(B) \vee Trad(C)))$	
8.	C	Supuesto
9.	$Trad(C)$	$E_{\to}$ 2, 8
10.	$(Trad(B) \vee Trad(C))$	$I_{\vee}$ 7
11.	$(C \to (Trad(B) \vee Trad(C)))$	$I_{\to}$ 8-10
12.	$(Trad(B) \vee Trad(C))$	$E_{\vee}$ 3, 7, 11
13.	$((B \vee C) \to (Trad(B) \vee Trad(C)))$	$I_{\to}$ 3-12

y la siguiente una demostración de $((Trad(B) \vee Trad(C)) \to (B \vee C))$ en *SG*:

1.	$(Trad(B) \to B)$	
2.	$(Trad(C) \to C)$	
3.	$(Trad(B) \vee Trad(C))$	Supuesto
4.	$Trad(B)$	Supuesto
5.	B	$E_{\to}$ 1, 4
6.	$(B \vee C)$	$I_{\vee}$ 5
7.	$(Trad(B) \to (B \vee C))$	
8.	$Trad(C)$	Supuesto
9.	C	$E_{\to}$ 2, 8
10.	$(B \vee C)$	$I_{\vee}$ 7
11.	$(Trad(C) \to (B \vee C))$	$I_{\to}$ 8-10
12.	$(B \vee C)$	$E_{\vee}$ 3, 7, 11
13.	$((Trad(B) \vee Trad(C)) \to (B \vee C))$	$I_{\to}$ 3-12

$\Rightarrow \vdash_{SG} ((B \vee C) \to (Trad(B) \vee Trad(C)))$ y $\vdash_{SG} ((Trad(B) \vee Trad(C)) \to (B \vee C))$
$\Rightarrow \vdash_{SG} ((B \vee C) \to Trad(B \vee C))$ y $\vdash_{SG} (Trad(B \vee C) \to (B \vee C))$
(Def. A.9, 4)
$\Rightarrow \vdash_{SG} (A \to Trad(A))$ y $\vdash_{SG} (Trad(A) \to A)$.

- *Caso 4.* $A \equiv (B \wedge C)$
  $\Rightarrow \vdash_{SG} (Trad(B) \to B)$ y $\vdash_{SG} (B \to Trad(B))$ y $\vdash_{SG} (Trad(C) \to C)$ y $\vdash_{SG} (C \to Trad(C))$ (Hip. ind.)
  $\Rightarrow$ la siguiente es una demostración de $((B \wedge C) \to (Trad(B) \wedge Trad(C)))$ en *SG*:

1.	$(B \to Trad(B))$	
2.	$(C \to Trad(C))$	
3.	$(B \wedge C)$	Supuesto
4.	B	$E_{\wedge}$ 3
5.	$Trad(B)$	$E_{\to}$ 1, 4
6.	C	$E_{\wedge}$ 3
7.	$Trad(C)$	$E_{\to}$ 2, 6
8.	$(Trad(B) \wedge Trad(C))$	$I_{\wedge}$ 5, 7
9.	$((B \wedge C) \to (Trad(B) \wedge Trad(C)))$	$I_{\to}$ 3-8

y la siguiente una demostración de $((Trad(B) \wedge Trad(C)) \to (B \wedge C))$ en *SG*:

1.	$(Trad(B) \to B)$	
2.	$(Trad(C) \to C)$	
3.	$(Trad(B) \wedge Trad(C))$	Supuesto
4.	$Trad(B)$	$E_\wedge$ 3
5.	B	$E_\to$ 1, 4
6.	$Trad(C)$	$E_\wedge$ 3
7.	C	$E_\to$ 2, 6
8.	$(B \wedge C)$	$I_\wedge$ 5, 7
9.	$((Trad(B) \wedge Trad(C)) \to (B \wedge C))$	$I_\to$ 3-8

$\Rightarrow \vdash_{SG} ((B \wedge C) \to (Trad(B) \wedge Trad(C)))$ y $\vdash_{SG} ((Trad(B) \wedge Trad(C)) \to (B \wedge C))$

$\Rightarrow \vdash_{SG} ((B \wedge C) \to Trad(B \wedge C))$ y $\vdash_{SG} (Trad(B \wedge C) \to (B \wedge C))$ (Def. A.9, 5)

$\Rightarrow \vdash_{SG} (A \to Trad(A))$ y $\vdash_{SG} (Trad(A) \to A)$.

Luego, en virtud de la Definición A.3, para cualquier expresión A de *G*, $\vdash_{SG} (A \to Trad(A))$ y $\vdash_{SG} (Trad(A) \to A)$. □

3. Si $Trad(\Gamma) \vdash Trad(A)$

$\Rightarrow$ existe un conjunto finito $Trad(\Delta) \subseteq Trad(\Gamma)$ tal que $Trad(\Delta) \vdash Trad(A)$ (Met. 5.13)

$\Rightarrow$ existe un conjunto finito $Trad(\Delta) \subseteq Trad(\Gamma)$ tal que $Trad(\Delta) \vdash_{SG} Trad(A)$. [1] (Met. A.2)

Sea $Trad(A_1), ..., Trad(A_n)$ una enumeración de los miembros de $Trad(\Delta)$ y, por ende, $\Delta = \{A_1, ..., A_n\}$. $\Delta \subseteq \Gamma$. Por lo tanto, de acuerdo con la Definición A.6, la siguiente es una derivación de A a partir de Γ en *SG*:

1.	A_1	Supuesto (Miembro de $\Delta \subseteq \Gamma$)
...	...	
n.	A_n	Supuesto (Miembro de $\Delta \subseteq \Gamma$)
n+1.	$(A_1 \to Trad(A_1))$	Ejercicio A.1.2
...	...	
2n.	$(A_n \to Trad(A_n))$	Ejercicio A.1.2
2n+1.	$Trad(A_1)$	$E_\to$ 1, n+1
...	...	
3n.	$Trad(A_n)$	$E_\to$ n, 2n
3n+1.	$Trad(A)$	[1] 2n+1-3n
3n+2.	$(Trad(A) \to A)$	Ejercicio A.1.2
3n+3.	A	$E_\to$ 3n+1-3n+2

$\Rightarrow \Gamma \vdash_{SG} A.$ □

4. *Prueba:* Supongamos por absurdo que *SG* es simplemente inconsistente

   $\Rightarrow$ existe una fórmula A de *G* tal que $\vdash_{SG} A$ y $\vdash_{SG} \neg A$ (Def. 4.8)

   $\Rightarrow$ existe una fórmula A de *G* tal que $\vdash Trad(A)$ y $\vdash Trad(\neg A)$ (Met. A.2)[35]

   $\Rightarrow$ existe una fórmula A de *G* tal que $\vdash Trad(A)$ y $\vdash \neg Trad(A)$ (Def. A.9, 2)

   $\Rightarrow$ existe una fórmula B de *P* tal que $\vdash B$ y $\vdash \neg B$ (Def. A.9)

   $\Rightarrow$ *SP* es simplemente inconsistente. (Def. 4.8)

   Llegamos a un absurdo, pues el Metateorema 4.12 indica que *SP* es simplemente consistente. El absurdo partió de suponer que *SG* es simplemente inconsistente. Luego, no lo es. □

5. *Prueba:* Supongamos por absurdo que *SG* es absolutamente inconsistente

   $\Rightarrow$ para toda fórmula A de *G*, $\vdash_{SG} A$ (Def. 4.9)

   $\Rightarrow$ para toda fórmula A de *P*, $\vdash_{SG} A$ (Def. A.3)[36]

   $\Rightarrow$ para toda fórmula A de *P*, $\vdash Trad(A)$ (Met. A.2)

   $\Rightarrow$ para toda fórmula A de *P*, $\vdash A$ (Def. A.9)[37]

   $\Rightarrow$ *SP* es absolutamente inconsistente (Def. 4.9)

   $\Rightarrow$ *SP* es simplemente inconsistente. (Met. 4.9)

   Llegamos a un absurdo, pues el Metateorema 4.12 indica que *SP* es simplemente consistente. El absurdo partió de suponer que *SG* es absolutamente inconsistente. Luego, no lo es. □

6. *Prueba:* Si $\Gamma \vdash_{SG} A$

   $\Rightarrow Trad(\Gamma) \vdash Trad(A)$ (Met. A.2)

   $\Rightarrow Trad(\Gamma) \vDash Trad(A)$ (Met. 5.2)

   $\Rightarrow$ para toda valuación V, $V(Trad(\Gamma)) = 1 \Rightarrow V(Trad(A)) = 1$ (Def. 3.5)

   $\Rightarrow$ para toda valuación$_G$ V_G, $V_G(Trad(\Gamma)) = 1 \Rightarrow V_G(Trad(A)) = 1$ (Def. A.7)

   $\Rightarrow$ para toda valuación$_G$ V_G, $V_G(\Gamma) = 1 \Rightarrow V_G(A) = 1$ (Met. A.1)

   $\Rightarrow \Gamma \vDash_G A.$ □

[35] Donde Γ es el conjunto vacío.
[36] Pues toda fórmula de *P* es a su vez una expresión de *P*.
[37] Pues si A es una expresión de *P*, su traducción es idéntica a sí misma.

7. Si $\vdash_{SG} A$

$\Rightarrow \vdash Trad(A)$ (Met. A.2)

$\Rightarrow \vDash Trad(A)$ (Met. 5.1)

$\Rightarrow$ para toda valuación V, $V(Trad(A)) = 1$ (Def. 3.5)

$\Rightarrow$ para toda valuación$_G$ V_G, $V_G(Trad(A)) = 1$ (Def. A.7)

$\Rightarrow$ para toda valuación$_G$ V_G, $V_G(A) = 1$ (Met. A.1)

$\Rightarrow \vDash_G A$. $\square$

8. Si $\Gamma \vDash_G A$

$\Rightarrow$ para toda valuación$_G$ V_G, $V_G(\Gamma) = 1 \Rightarrow V_G(A) = 1$

$\Rightarrow$ para toda valuación$_G$ V_G, $V_G(Trad(\Gamma)) = 1 \Rightarrow V_G(Trad(A)) = 1$ (Met. A.1)

$\Rightarrow$ para toda valuación V, $V(Trad(\Gamma)) = 1 \Rightarrow V(Trad(A)) = 1$ (Def. A.7, 1, 2)[38]

$\Rightarrow Trad(\Gamma) \vDash Trad(A)$ (Def. 3.5)

$\Rightarrow Trad(\Gamma) \vdash Trad(A)$ (Met. 5.10)

$\Rightarrow \Gamma \vdash_{SG} A$. (Ejer. A.1.3) $\square$

9. ***Prueba:*** Si $\vDash_G A$

$\Rightarrow$ para toda valuación$_G$ V_G, $V_G(A) = 1$

$\Rightarrow$ para toda valuación$_G$ V_G, $V_G(Trad(A)) = 1$ (Met. A.1)

$\Rightarrow$ para toda valuación V, $V(Trad(A)) = 1$ (Def. A.7)

$\Rightarrow \vDash Trad(A)$ (Def. 3.5)

$\Rightarrow \vdash Trad(A)$ (Met. 5.10)

$\Rightarrow \phi \vdash Trad(A)$ (Met. 4.6)

$\Rightarrow \phi \vdash_{SG} A$ (Ejer. A.1.3)[39]

$\Rightarrow \vdash_{SG} A$[40] $\square$

---

[38] Puesto que tanto $Trad(A)$ como los miembros de $Trad(\Gamma)$ son expresiones de *P*, sólo pueden contener las conectivas $\neg$ y $\rightarrow$. Luego, con respecto a estas fórmulas las valuaciones y las valuaciones$_G$ se comportan de exacto igual modo: como indican las cláusulas 1 y 2 de las Definiciones 3.1 y A.7.

[39] Pues $Trad(\phi) = \phi$.

[40] Pues no quedaron supuestos sin cancelar o, lo que es lo mismo, todos los supuestos sin cancelar pertenecen a ϕ.

10. *Prueba:* Si $\Gamma \vDash_G A$

$\Rightarrow \Gamma \vdash_{SG} A$ (Met. A.8)

$\Rightarrow$ existe un conjunto $\Delta \subseteq \Gamma$, finito, tal que $\Delta \vdash_{SG} A$ (Met. A.3)

$\Rightarrow$ existe un conjunto $\Delta \subseteq \Gamma$, finito, tal que $\Delta \vDash_G A$. (Met. A.6) $\square$

11. *Prueba:* Dada una fórmula A cualquiera de *G*, las tablas de verdad basadas en la Definición A.7 de valuación$_G$ resultan un método efectivo para decidir si $\vDash_G A$. Además, por los Metateoremas A.7 y A.9, ($\vDash_G A \Leftrightarrow \vdash_{SG} A$). Luego, las tablas son un método efectivo para determinar también si $\vdash_{SG} A$ y, por la Definición 5.5, *SG* es decidible. $\square$

Bibliografía

[1] Boolos, G., Burgess, J., and Jeffrey, R. *Computability and Logic*, Quinta ed. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[2] Coffa, J. A. Dos concepciones de la elucidación filosófica. *Crítica 7* (1975), 43–67.

[3] Corcoran, J., Ed. *Logic, Semantics and Metamathematics.* Hackett, Indianapolis, 1983.

[4] Gamut, L. T. F. *Introducción a la Lógica.* Eudeba, Buenos Aires, 1991.

[5] Hunter, G. *Metalogic. An Introduction to the Metatheory of Standard First-Order Logic.* University of California Press, Berkeley, 1973.

[6] Moro Simpson, T. Análisis y eliminación, una módica defensa de quine. *Crítica 7* (1975), 69–83.

[7] Quine, W. V. O. *From a logical point of view.* Harvard University Press, Cambridge, 1953.

[8] Quine, W. V. O. *Word and object.* MIT Press, Cambridge, 1960.

[9] Tarski, A. The concept of truth in formalized languajes. In *Logic, Semantics, Metamathematics*, Segunda ed. Hackett, Indianapolis, 1935, pp. 152–278.

[10] Wittgenstein, L. *Investigaciones Filosóficas.* Instituto de Investigaciones Filosóficas UNAM, México, 1953.

[11] Wittgenstein, L. *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática.* Alianza, Madrid, 1967.

[12] Wittgenstein, L. *Gramática Filosófica.* Instituto de Investigaciones Filosóficas UNAM, México, 1969.