Lógica

Completitud

$\vdash$ / $\models$

Profesor: Eduardo Barrio
UBA - Filosofía
1er cuatrimestre de 2012

La completitud de la lógica clásica

La lógica proposicional es:

- Completa $\Gamma \vDash A \Rightarrow \Gamma \vdash A$ $\vDash A \Rightarrow \vdash A$

El Metateorema de Completitud:

Estrategia de la Prueba de Henkin

Paso 1: suponer $\Gamma \vDash A$

Paso 2: Definir $\Gamma \vDash A$:

Toda V tal que V(Γ): 1, V(A): 1

Paso 3: Asociar el conjunto $\Gamma \cup \{ \neg A \}$

$\neg\exists$V tal que V(Γ): 1 & V(¬A): 1

Paso 4: el conjunto $\Gamma \cup \{ \neg A \}$ es insatisfacible

Paso 5: el conjunto $\Gamma \cup \{ \neg A \}$ es inconsistente

Paso 6: el conjunto $\Gamma \cup \{ A \}$ es consistente

Paso 7 :

Si el conjunto $\Gamma \cup \{ A \}$ es consistente, $\Gamma \vdash A$

Paso 8 :

$\Gamma \vdash A$

Consistente ⇒ Satisfacible

Todo conjunto consistente es satisfacible

Si Γ es consistente, entonces Γ es satisfacible

¿Qué sabemos de Γ?

- Γ está compuesto por fórmulas bien formadas.

  - no sabemos mucho mas...

- Hay fórmulas de tres tipos: Símbolos proposicionales - Negaciones - Condicionales

- No sabemos nada del tamaño de Γ, aunque como máximo será infinito enumerable.

Metateorema 5.5

Metateorema 5.5: Si Γ es maximal consistente y $\Gamma \vdash A$ entonces $A \in \Gamma$

Prueba:

Sea Γ maximal consistente y $\Gamma \vdash A$
Supongamos que A no esté en Γ
$\Rightarrow \neg A$ está en Γ

$\Rightarrow \Gamma \vdash \neg A$

$\Rightarrow \Gamma \vdash A$ y $\Gamma \vdash \neg A$ (Absurdo)
A está en Γ

Si Γ es maximal consistente y $\Gamma \vdash A$ entonces $A \in \Gamma$ Por TD

Metateorema 5.6

Metateorema 5.6: Hay una enumeración efectiva de todas las fórmulas de P.

Comenzamos asignándoles numerales a los símbolos de P
p 10
‘ 100
¬ 1000
→ 10000
(100000
) 1000000

El numeral de una fórmula es la operación de yuxtaposición.
Ordenamos las fórmulas de acuerdo con sus numerales.
Esta enumeración es efectiva, ya que a fórmulas diferentes le corresponden numerales diferentes y existe un método efectivo para encontrar el lugar en el que se encuentra cada fórmula.

Lema de Lindenbaum

Todo conjunto consistente es un subconjunto de un maximal consistente

Estrategía de la Prueba:

- Utilizando el metateorema de enumeración, definimos la expansión de un Γ consistente, obteniendo Γ^{Max}.

- Para toda A o bien A está en Γ^{Max} o bien A U Γ^{Max} es inconsistente.

Sea $\langle A_0, A_1, A_2, A_{3,\ldots,} A_n \rangle$ una enumeración efectiva de P,

Definimos una secuencia infinita S': $\{ \Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_{3,\ldots,} \Gamma_n \}$ de Γ cada vez más grandes

- $\Gamma_{0\,:}\,\Gamma$
- Si $\Gamma_n \cup \{ A_{n+1} \}$ es inconsistente $\Rightarrow$ Γ_{n+1} es igual a Γ_n
- Si $\Gamma_n \cup \{ A_{n+1} \}$ es consistente $\Rightarrow$ Γ_{n+1} es igual a $\Gamma_n \cup \{ A_{n+1} \}$
- Γ^{Max} es la secuencia de todos los $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_{3,\ldots,} \Gamma_n$

- Por inducción, se prueba que se prueba que todos los conjuntos de la secuencia son consistentes y por ello, que Γ^{Max} es maximal consistente:

Lema de Henkin

Todo conjunto consistente es satisfacible

Estrategía de la Prueba:

- Utilizando el lema de Lindenbaum, se construye un conjunto maximal consistente a partir de cualquier conjunto Γ consistente, obteniendo Γ^{Max}.

- Se define una valuación que asigne 1 a toda fórmula de Γ^{Max} y 0 a toda fórmula que no está en Γ^{Max}

- Se prueba por inducción matemática sobre el número de conectivas de A, que

Para toda A, V(A):1 $\Leftrightarrow$ A $\in \Gamma^{Max}$.

Caso base: A es un símbolo proposicional
Paso inductivo:
HI: V(A):1 $\Leftrightarrow$ A $\in \Gamma^{Max}$ para toda A de complejidad menor a k

Sea A de complejidad igual a k
Hay dos casos: (i) A = $\neg$B
(ii) A = B $\rightarrow$ C

Lema de Henkin

Todo conjunto consistente es satisfacible

- Se prueba por inducción matemática sobre el número de conectivas de A, que

Para toda A, V(A):1 $\Leftrightarrow$ A $\in \Gamma^{Max}$.

Paso inductivo:
HI: V(A):1 $\Leftrightarrow$ A $\in \Gamma^{Max}$ para toda A de complejidad menor a k
caso (i) A tiene complejidad k y A = $\neg$B

($\Rightarrow$) - V(A):1 $\Rightarrow$ V($\neg$B):1 $\Rightarrow$ V(B):0 $\Rightarrow$ Por HI B $\notin \Gamma^{Max}$ $\Rightarrow$ $\neg$B $\in \Gamma^{Max}$ $\Rightarrow$ A $\in \Gamma^{Max}$
($\Leftarrow$) - A $\in \Gamma^{Max}$ $\Rightarrow$ B $\notin \Gamma^{Max}$ $\Rightarrow$ Por HI V(B):0 $\Rightarrow$ V($\neg$B):1 $\Rightarrow$ V(A):1

Lema de Henkin

Para todo conjunto Γ, Γ consistente si y sólo si es satisfacible

$\Gamma \cup \{ \neg A \}$ consistente si y sólo si es satisfacible

Metateorema 5.9

Metateorema 5.9: Si $\Gamma \cup \{ \neg A \}$ es inconsistente, $\Gamma \vdash A$

Completitud Fuerte:

$\Gamma \vDash A \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash A$

$\Gamma \cup \{ \neg A \}$

Es insatisfacible

Es inconsistente

- Todo conjunto insatisfacible es inconsistente.
- Todo conjunto consistente es satisfacible.

Completitud de SP:

$\models A \quad \Rightarrow \quad \vdash A$

$\emptyset \cup \{ \neg A \}$

Es insatisfacible

Es inconsistente

- Todo conjunto insatisfacible es inconsistente.
- Todo conjunto consistente es satisfacible.

Metateorema 5.12:

$$\models A \quad \Leftrightarrow \quad \vdash A$$

Teorema de Corrección

Teorema de Completitud

Teorema de Finitud:

$\Gamma \vdash A \Rightarrow \Gamma^0 \subseteq \Gamma$ y Γ^0 es finito $\Gamma^0 \vdash A$

Teorema de Compacidad:

Teorema de Compacidad:

Si todo Γ^0 finito e incluido Γ es satisfacible, Γ es satisfacible

Supongamos que Γ es insatificable
Γ es inconsistente (Lema de Henkin)
Existe una A tal que $\Gamma \vdash A$ y $\Gamma \vdash \neg A$

Se usan sólo finitos axiomas de Γ y la derivación es finita
Existe un Γ^0 que es finito tal que $\Gamma^0 \vdash A$ y $\Gamma^0 \vdash \neg A$

Γ^0 es inconsistente
Γ^0 es insatisfacible

$\Gamma \vDash A \Rightarrow \Gamma^0 \subseteq \Gamma$ y Γ^0 es finito $\Gamma^0 \vDash A$

Esquema de las propiedades de SP

SP	
TEORÍA DE MODELOS	TEORÍA DE LA PRUEBA
TAUTOLOGÍA Verdad en todo modelo	TEOREMA tiene una demostración en SP
Consecuencia semántica $\models$	Consecuencia sintáctica $\vdash$
Conjunto satisfacible (existe un modelo para todos los elementos)	Conjunto consistente (No permite probar A y $\neg$A)
Compacidad	Finitud