Resumen de teoría elemental de conjuntos (segunda parte)

Javier Castro Albano

11. El conjunto potencia

Dado un conjunto A, el conjunto de partes de A, P(A), llamado también el conjunto potencia de A es el conjunto de todos los subconjuntos de A: P(A)=$\{x | x \subseteq A\}$

Ejemplo: Sea A=$\{1, 2,\}$. P(A) = $\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

Nótese que para todo conjunto A, siempre $\varnothing \in$P(A) y A$\in$P(A).

12. Pares ordenados

Los pares $\{a, b\}$ no son pares ordenados, es decir, el orden de los elementos a y b no juega ningún rol en el conjunto. No hay ninguna diferencia entre $\{a, b\}$ y $\{b, a\}$. Pero los matemáticos suelen hablar también de *pares ordenados* de objetos $< a, b >$ (a veces se usa la notación '(a, b)' para los pares ordenados). En general, $< a, b > \neq < b, a >$. Más precisamente, los pares ordenados satisfacen la siguiente la ley:

$$< a, b > = < c, d > \text{ si y solo si } a = c \text{ y } b = d$$

La ley de los pares ordenados fija el criterio de identidad entre pares ordenados: nos dice que los pares ordenados $< a, b >$ y $< c, d >$ son iguales si y solo si tanto su primer término como su segundo término son iguales ($a = c$ y $b = d$).

13. Secuencias finitas

Así como tenemos pares ordenados podemos tener triplos ordenados (o ternas ordenadas), $< a, b,c >$. En general, para cada número natural n, podemos tener una secuencia ordenada de n términos: $< a_1,\ldots , a_n>$. La longitud de una secuencia está dada por la cantidad de términos que aparecen en ella: un par ordenado es una secuencia de longitud 2; un triplo ordenado es una secuencia de longitud 3; en general, las secuencias de n elementos se denominan n-tuplas ordenadas.

Nótese que, a diferencia de lo que ocurre con los conjuntos, la secuencia $< a, b, b >$ y la secuencia $< a, b >$ no son iguales (la primera es una secuencia de tres elementos, la segunda de dos); Tampoco $< a, b,c >$ y $< a, c, b >$ son iguales.

14. Secuencias finitas y conjuntos

Las secuencias pueden considerarse como cierto tipo peculiar de conjuntos. Veamos primero el caso de los pares ordenados. La característica fundamental de los pares ordenados es que cumplen la ley $< a, b > \; = \; < c, d >$ si y solo si $a = c$ y $b = d$. De hecho, lo único que se requiere para identificar pares ordenados es que cumplan esa ley. A partir de esta idea, surge la siguiente definición de par ordenado en términos de pares no ordenados: el par ordenado $< a, b >$ se identifica con el par no ordenado $\{\{a, b\}, \{a\}\}$.

La idea es que $\{\{a, b\}, \{a\}\}$ es un conjunto con dos elementos: uno de ellos es un par $\{a, b\}$ (no ordenado) que fija los elementos del par ordenado y el otro es un conjunto unitario $\{a\}$ que fija cuál es el primer elemento del par. No es difícil probar que los pares (no ordenados) con esa estructura cumplen el mismo criterio de identidad que los pares ordenados:

$$\{\{a, b\}, \{a\}\} = \{\{c, d\}, \{c\}\} \text{ si y solo si } \{a, b\} = \{c, d\} \text{ y , } \{a\} = \{c\}$$

El hecho de que los conjuntos que tienen la estructura $\{\{a, b\}, \{a\}\}$ cumplan la ley fundamental de los pares ordenados muestra que el concepto de *orden* puede caracterizarse en la teoría de conjuntos.

En la medida en que los pares ordenados pueden verse como conjuntos con cierta estructura especial, podemos hablar de conjuntos de pares ordenados: el conjunto $A = \{< a, b >, < c, d >\}$ es un conjunto de pares ordenados, sus elementos son los pares ordenados $< a, b >$ y $< c, d >$. (Nótese que aunque A es un conjunto cuyos elementos son pares ordenado, el propio A ***no*** es un par ordenado).

Hemos visto que el par ordenado $< a, b >$ puede definirse como el conjunto (no ordenado) $\{\{a, b\}, \{a\}\}$. Con esto hemos abierto la puerta para definir todas las secuencias finitas, pues el triplo ordenado $< a, b, c >$ puede entenderse como el par ordenado $< < a, b >, c >$, el cuádruplo ordenado $< a, b, c, d >$ como el par ordenado $< < a, b, c >, d >$, y así sucesivamente. De este modo, la definición de par ordenado en términos de conjuntos permite definir todas las secuencias finitas en términos de conjuntos.

15. Producto cartesiano

Algunos conjuntos de pares ordenados son especialmente relevantes. El *producto cartesiano* de los conjuntos A y B (A×B) es el conjunto de todos los pares ordenados $<x,y>$ tales que $x \in$A y $y \in$B: A×B = $\{<x,y> \mid x \in A \text{ y } y \in B\}$

Ejemplo: Sea A = {1, 2, 3} y B = {4, 5}. A×B = $\{<x,y> \mid x \in A \text{ y } y \in B\}$ = $\{<1,4>, <1,5>, <2,4>, <2,5>, <3,4>, <3,5>\}$

El conjunto A^2 = A×A es el producto cartesiano de A consigo mismo. Si A = {1, 2, 3}, entonces A^2 = A×A = $\{<1,1>, <1,2>, <1,3>, <2,1>, <2,2>, <2,3>, <3,1>, <3,2>, <3,3>\}$.

A^3 es el conjunto de triplos ordenados de elementos de A y, en general, A^n es el conjunto de n-tuplas ordenadas de elementos de A.

16. Relaciones y funciones

El conjunto R es una *relación binaria* entre los conjuntos A y B si y solo si R es un subconjunto de A×B. El conjunto R es una relación binaria en el conjunto A si y solo si R es un subconjunto de A×A. Las relaciones binarias, por lo tanto, son conjuntos de pares ordenados. En general, una relación n-aria es un subconjunto de A^n.

Una función f de A a B (en símbolos f:A→B) es una relación binaria entre A y B que cumple las dos condiciones siguientes:

(i) Para todo elemento x de A hay un elemento y de B tal que el par $<x,y> \in f$.

(ii) Si el par $<x,y> \in f$ y el par $<x,z> \in f$ entonces $y = z$.

Las primera condición exige que la función f le asigna a cada elemento de A un elemento del conjunto B; la segunda condición exige que f le asigne solamente uno.

Ejemplos: Sea A el conjunto de los números naturales y R el conjunto de todos los pares ordenados $<x,y>$ de elementos de A tales que x es menor que y. Según este ejemplo, $<1,2>$, $<1,3>$ $<2,5>$ y $<2,24>$ son algunos de los elementos de R (pero $<2,1>$ no es un elemento de R porque 2 no es menor que 1). Pero la relación R de este ejemplo no es una función, porque viola la condición (ii): $<1,2> \in$R y $<1,3> \in$R, pero $2 \neq 3$.

En cambio, el conjunto f de todos los pares ordenados $<x,y>$ de elementos de A tales que y es el doble de y (esto es: $\{<x,y> \mid y = 2x\}$) sí es una función.

17. Funciones biyectivas

La función f:A→B es biyectiva si y solo si se cumplen dos condiciones:

(i) Para cada elemento y de B hay un par ordenado $\langle x,y\rangle$, tal que $\langle x,y\rangle\in f$

(ii) Si $\langle x,y\rangle\in f$ y $\langle z,y\rangle\in f$, entonces $x=z$.

Sea f una función. Lo que hace a f una función biyectiva es que el conjunto de todos los pares ordenados $\langle y, x\rangle$ tales que $\langle x,y\rangle\in f$ es también una función.

Ejemplo: Sea A={1, 2, 3}, B={4, 6} y C={2, 4, 6}. La función $f=\{\langle 1,4\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,6\rangle\}$ no es biyectiva, pues no cumple la condición (ii). Pero la función $g=\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,6\rangle\}$ cumple ambas condiciones y es, por lo tanto una función biyectiva.

18. Cardinalidad

Nótese que el que A y B tengan la misma cantidad de elementos es una condición necesaria para que exista una función biyectiva entre A y B. En este hecho se basa la siguiente definición: dos conjuntos A y B tienen el mismo cardinal (A≅B) si y solo si existe una función biyectiva f:A→B (y, por lo tanto, existe también una función g:B→A).

Por lo tanto dos conjuntos A y B tienen la misma cantidad de elementos si y solo si A≅B.

19. Conjuntos infinitos

Una peculiaridad de los conjuntos infinitos, que fue notada (entre otros) por Galileo, es la siguiente. Consideremos el conjunto N de los números naturales:

1, 2, 3, 4, 5, …

Pensemos ahora en el conjunto P de los números naturales pares y en la función f:N→P, tal que $f(n)=2n$:

$1 \Rightarrow 2$

$2 \Rightarrow 4$

$3 \Rightarrow 6$

$4 \Rightarrow 8$

$5 \Rightarrow 10$

Etc.

La función f, tal como puede verse fácilmente, es biyectiva. A cada número natural le podemos hacer corresponder un número par (y viceversa). Esto significa que N y P tienen el mismo cardinal y, por consiguiente, la misma cantidad de elementos. Pero P es un subconjunto propio de los números naturales. Todo esto puede resultar extraño: parece razonable pensar que hay menos número naturales pares que número naturales. Pero hemos visto que no es así.

Todos los subconjuntos propios de un conjunto finito A tienen menos elementos que A. Pero los conjuntos infinitos tienen la siguiente peculiaridad: algunos de sus subconjuntos propios tienen su misma cardinalidad. Si entendemos que un subconjunto propio de A es una parte de A, la característica anterior de los conjuntos infinitos a veces se ha planteado así: los conjuntos infinitos violan el principio de que el todo es siempre mayor que la parte.

20. Existencia de conjuntos

¿Qué conjuntos existen? Hemos visto que el principio de comprensión no puede aceptarse como criterio de existencia de conjuntos. Las teorías axiomáticas de conjuntos ofrecen distintas respuestas a la pregunta por la existencia de conjuntos. Además del axioma de extensionalidad, las teorías de conjuntos suelen admitir las tesis siguientes:

- Existe el conjunto vacío
- Dados dos objetos a y b, existe $\{a, \mathrm{b}\}$
- Dados dos conjuntos A y B, existe $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$
- Dado un conjunto A, existe $\mathrm{P(A)}=\{x|x\subseteq \mathrm{A}\}$
- El axioma de separación: dado un conjunto A y una propiedad P, existe $\{x|x\in\mathrm{A} \text{ y } \mathrm{P}x\}$
- Existe el conjunto N de los números naturales
- No existe ningún conjunto x tal que $x\in x$

No todas las teorías axiomáticas aceptan todos los resultados anteriores. Pero lo usual es que lo hagan y, en realidad, es habitual que acepten versiones más fuertes de algunos de esos resultados.