La Lógica de la Verdad

Damián E. Szmuc

UBA

12 de Mayo de 2014
Clase 9

Semántica de Puntos Fijos

Objetivo: Obtener un conjunto (o colección de conjuntos) de (códigos de) oraciones que den la extensión y la anti-extensión del predicado Tr

Procedimiento:

- Definimos un esquema de de valuación.
- Definimos un operador salto para ese esquema de valuación.
- El punto fijo (los conjuntos de puntos fijos) de dicha operación nos dan lo que buscamos.

Operador κ_M

- El operador salto $\kappa_M : \iota(T) \to \iota(T)$ es definible recursivamente del siguiente modo.
- Damos las cláusulas para el caso de las oracioes sin Tr, el caso de oraciones con Tr, iteraciones de Tr, el caso de la negación, la disyunción (la conjunción y el condicional material son análogos)
- **Sea $\ulcorner \phi \urcorner$ el código de ϕ para toda oración ϕ incluida en L_{Tr}**

Operador salto: cláusula para oraciones sin *Tr*

Si ϕ es una oración <u>verdadera</u> del lenguaje base, atómica o molecular diremos que el operador salto u operador de corrección κ_M se comporta de la siguiente manera

- Para toda interpetación g que asigne cualquierasea valores a ϕ, sabemos que $\langle \ulcorner \phi \urcorner, 1 \rangle \in \kappa_M(g)$

  Es decir
- $g = \{\dots\}$
- $\kappa_M(g) = \{\langle \ulcorner \phi \urcorner, 1 \rangle, \dots\}$

Si ϕ es una oración <u>falsa</u> del lenguaje base, atómica o molecular diremos que el operador salto u operador de corrección κ_M es tal que

- Para toda interpetación g que asigne cualquierasea valores a ϕ, sabemos que $\langle \ulcorner \phi \urcorner, 0 \rangle \in \kappa_M(g)$

  Es decir
- $g = \{\dots\}$
- $\kappa_M(g) = \{\langle \ulcorner \phi \urcorner, 0 \rangle, \dots\}$

Operador salto: cláusula para oraciones con apiriciones de *Tr*

Sea ϕ una oración con apariciones de Tr, por ejemplo $Tr(\ulcorner\psi\urcorner)$, y x el valor de verdad de ψ en la interpretación g.

Diremos que el operador salto u operador de corrección κ_M se comporta de la siguiente manera

- Si $\langle\ulcorner\psi\urcorner, x\rangle \in (g)$, entonces $\langle\ulcorner Tr(\ulcorner\psi\urcorner)\urcorner, x\rangle \in \kappa_M(g)$

  Es decir
- $g = \{\langle\ulcorner\psi\urcorner, x\rangle, \dots\}$
- $\kappa_M(g) = \{\langle\ulcorner\psi\urcorner, x\rangle, \langle\ulcorner Tr(\ulcorner\psi\urcorner)\urcorner, x\rangle, \dots\}$

Operador salto: los casos moleculares

Sean ϕ, ψ, χ oraciones con apariciones de Tr. Sean, respectivamente, z, x, w sus valores de verdad en la interpretación g.

Diremos que el operador salto u operador de corrección κ_M se comporta de la siguiente manera

- Sea ϕ la fórmula $\neg\psi$
- Si $\langle \ulcorner\psi\urcorner, x\rangle \in (g)$, entonces $\langle \ulcorner\psi\urcorner, x\rangle, \langle \ulcorner\phi\urcorner, \neg_\kappa(x)\rangle \in \kappa_M(g)$

  Es decir
- $g = \{\langle \ulcorner\psi\urcorner, x\rangle, \ldots\}$
- $\kappa_M(g) = \{\langle \ulcorner\psi\urcorner, x\rangle, \langle \ulcorner\phi\urcorner, \neg_\kappa(x)\rangle, \ldots\}$

Operador salto: los casos moleculares

Sean ϕ, ψ, χ oraciones con apariciones de Tr. Sean, respectivamente, z, x, w sus valores de verdad en la interpretación g.

Diremos que el operador salto u operador de corrección κ_M se comporta de la siguiente manera

- Sea ϕ la fórmula $\psi \vee \chi$
- Si $\langle \ulcorner \psi \urcorner, x \rangle, \langle \ulcorner \chi \urcorner, w \rangle \in (g)$, entonces $\langle \ulcorner \psi \urcorner, x \rangle, \langle \ulcorner \chi \urcorner, w \rangle, \langle \ulcorner \psi \vee \chi \urcorner, \vee_\kappa(x, w) \rangle \in \kappa_M(g)$

  Es decir
- $g = \{\langle \ulcorner \psi \urcorner, x \rangle, \langle \ulcorner \chi \urcorner, w \rangle, \dots\}$
- $\kappa_M(g) = \{\langle \ulcorner \psi \urcorner, x \rangle, \langle \ulcorner \chi \urcorner, w \rangle, \langle \ulcorner \psi \vee \chi \urcorner, \vee_\kappa(x, w) \rangle, \dots\}$

Lo análogo pasa con los casos de la conjunción y del condicional material, reemplazando oportunamente $\vee_\kappa(x, w)$ **por** $\wedge_\kappa(x, w)$ **o** $\supset_\kappa (x, w)$. Los casos cuantificacionales son generalizaciones de éstos.

EJEMPLOS

Operador κ_M: sobre oraciones sin Tr

Si $\phi, \psi \in L_{Tr}$, ϕ <u>no</u> tiene apariciones de Tr, 1 es el valor de ϕ en M_B
$\Rightarrow$ entonces $\langle \ulcorner \phi \urcorner, 1 \rangle$ estará en el punto fijo de κ_M

Esto presenta dos casos: (1) $g = \emptyset$ y (2) $g \neq \emptyset$ y $g \neq \kappa_M(g)$
Ejemplo del primer caso

- $g = \emptyset$
- $\kappa_M(g) = \{\langle \ulcorner \phi \urcorner, 1 \rangle, \ldots\}$

Operador κ_M: sobre oraciones sin Tr

Si $\phi, \psi \in L_{Tr}$, ϕ no tiene apariciones de Tr, 1 es el valor de ϕ en M_B $\Rightarrow$ entonces $\langle \ulcorner \phi \urcorner, 1 \rangle$ estará en el punto fijo de κ_M

Esto presenta dos casos: (1) $g = \emptyset$ y (2) $g \neq \emptyset$ y $g \neq \kappa_M(g)$
Ejemplo del primer caso

- $g = \emptyset$
- $\kappa_M(g) = \{\langle \ulcorner \phi \urcorner, 1 \rangle, \ldots\}$

Ejemplos del segundo caso

- $g_1 = \{\langle \ulcorner \phi \urcorner, 0 \rangle\}$
- $g_2 = \{\langle \ulcorner \phi \urcorner, \frac{1}{2} \rangle\}$
- $\kappa_M(g_1) = \{\langle \ulcorner \phi \urcorner, 1 \rangle, \ldots\} = \kappa_M(g_2)$

Operador κ_M: sobre oraciones con *Tr*

Si $\phi, \psi \in L_{Tr}$, ϕ es el nombre de $Tr(\ulcorner\psi\urcorner)$, 1 es el valor de ψ en M_B
$\Rightarrow$ entonces $\langle\ulcorner Tr(\ulcorner\psi\urcorner)\urcorner, 1\rangle$ estará en el punto fijo de κ_M

Esto presenta dos casos: (1) $g = \emptyset$ y (2) $g \neq \emptyset$ y $g \neq \kappa_M(g)$
Ejemplo del primer caso

- $g = \emptyset$
- $\kappa_M(g) = \{\langle\ulcorner\psi\urcorner, 1\rangle, \dots\}$
- $\kappa_M(\kappa_M(g)) = \{\langle\ulcorner\psi\urcorner, 1\rangle, \langle\ulcorner Tr(\ulcorner\psi\urcorner)\urcorner, 1\rangle \dots\}$

Operador κ_M: sobre oraciones con Tr

Si $\phi, \psi \in L_{Tr}$, ϕ es el nombre de $Tr(\ulcorner\psi\urcorner)$, 1 es el valor de ψ en M_B
$\Rightarrow$ entonces $\langle\ulcorner Tr(\ulcorner\psi\urcorner)\urcorner, 1\rangle$ estará en el punto fijo de κ_M

Esto presenta dos casos: (1) $g = \emptyset$ y (2) $g \neq \emptyset$ y $g \neq \kappa_M(g)$
Ejemplo del primer caso

- $g = \emptyset$
- $\kappa_M(g) = \{\langle\ulcorner\psi\urcorner, 1\rangle, \dots\}$
- $\kappa_M(\kappa_M(g)) = \{\langle\ulcorner\psi\urcorner, 1\rangle, \langle\ulcorner Tr(\ulcorner\psi\urcorner)\urcorner, 1\rangle \dots\}$

Ejemplo del segundo caso

- $g = \{\langle\ulcorner\psi\urcorner, 0\rangle\}$
- $\kappa_M(g) = \{\langle\ulcorner\psi\urcorner, 1\rangle, \dots\}$
- $\kappa_M(\kappa_M(g)) = \{\langle\ulcorner\psi\urcorner, 1\rangle, \langle\ulcorner Tr(\ulcorner\psi\urcorner)\urcorner, 1\rangle \dots\}$

Operador κ_M: sobre oraciones con iteraciones de Tr

Si $\phi, \psi \in L_{Tr}$**,** ϕ **es el nombre de** $Tr(\ulcorner Tr(\ulcorner \psi \urcorner)\urcorner)$**,** 1 **es el valor de** ψ **en** M_B
$\Rightarrow$ **entonces** $\langle \ulcorner Tr(\ulcorner Tr(\ulcorner \psi \urcorner)\urcorner)\urcorner, 1\rangle$ **estará en el punto fijo de** κ_M

Esto presenta dos casos: (1) $g = \emptyset$ y (2) $g \neq \emptyset$ y $g \neq \kappa_M(g)$
Ejemplo del primer caso

- $g = \emptyset$
- $\kappa_M(g) = \{\langle \ulcorner \psi \urcorner, 1\rangle, \dots\}$
- $\kappa_M(\kappa_M(g)) = \{\langle \ulcorner \psi \urcorner, 1\rangle, \langle \ulcorner Tr(\ulcorner \psi \urcorner)\urcorner, 1\rangle \dots\}$
- $\kappa_M(\kappa_M(\kappa_M(g))) = \{\langle \ulcorner \psi \urcorner, 1\rangle, \langle \ulcorner Tr(\ulcorner \psi \urcorner)\urcorner, 1\rangle, \langle \ulcorner Tr(\ulcorner Tr(\ulcorner \psi \urcorner)\urcorner)\urcorner, 1\rangle, \dots\}$

Operador κ_M: sobre oraciones con iteraciones de Tr

Si $\phi, \psi \in L_{Tr}$, ϕ **es el nombre de** $Tr(\ulcorner Tr(\ulcorner \psi \urcorner) \urcorner)$, 1 **es el valor de** ψ **en** M_B
$\Rightarrow$ **entonces** $\langle \ulcorner Tr(\ulcorner Tr(\ulcorner \psi \urcorner) \urcorner) \urcorner, 1 \rangle$ **estará en el punto fijo de** κ_M

Esto presenta dos casos: (1) $g = \emptyset$ y (2) $g \neq \emptyset$ y $g \neq \kappa_M(g)$
Ejemplo del primer caso

- $g = \emptyset$
- $\kappa_M(g) = \{\langle \ulcorner \psi \urcorner, 1 \rangle, \dots\}$
- $\kappa_M(\kappa_M(g)) = \{\langle \ulcorner \psi \urcorner, 1 \rangle, \langle \ulcorner Tr(\ulcorner \psi \urcorner) \urcorner, 1 \rangle \dots\}$
- $\kappa_M(\kappa_M(\kappa_M(g))) = \{\langle \ulcorner \psi \urcorner, 1 \rangle, \langle \ulcorner Tr(\ulcorner \psi \urcorner) \urcorner, 1 \rangle, \langle \ulcorner Tr(\ulcorner Tr(\ulcorner \psi \urcorner) \urcorner) \urcorner, 1 \rangle, \dots\}$

Ejemplo del segundo caso

- $g = \{\langle \ulcorner \psi \urcorner, 0 \rangle\}$
- $\kappa_M(g) = \{\langle \ulcorner \psi \urcorner, 1 \rangle, \dots\}$
- $\kappa_M(\kappa_M(g)) = \{\langle \ulcorner \psi \urcorner, 1 \rangle, \langle \ulcorner Tr(\ulcorner \psi \urcorner) \urcorner, 1 \rangle \dots\}$
- $\kappa_M(\kappa_M(\kappa_M(g))) = \{\langle \ulcorner \psi \urcorner, 1 \rangle, \langle \ulcorner Tr(\ulcorner \psi \urcorner) \urcorner, 1 \rangle, \langle \ulcorner Tr(\ulcorner Tr(\ulcorner \psi \urcorner) \urcorner) \urcorner, 1 \rangle, \dots\}$

Operador κ_M: oraciones con Tr y negación como conectiva principal

Si $\phi, \psi \in L_{Tr}$, ϕ es el nombre de $\neg Tr(\ulcorner\psi\urcorner)$, 1 es el valor de ψ en M_B
$\Rightarrow$ entonces $\langle\ulcorner\neg Tr(\ulcorner\psi\urcorner)\urcorner, 0\rangle$ estará en el punto fijo de κ_M

Esto presenta dos casos: (1) $g = \emptyset$ y (2) $g \neq \emptyset$ y $g \neq \kappa_M(g)$
Ejemplo del primer caso

- $g = \emptyset$
- $\kappa_M(g) = \{\langle\ulcorner\psi\urcorner, 1\rangle, \dots\}$
- $\kappa_M(\kappa_M(g)) = \{\langle\ulcorner\psi\urcorner, 1\rangle, \langle\ulcorner Tr(\ulcorner\psi\urcorner)\urcorner, 1\rangle \dots\}$
- $\kappa_M(\kappa_M(g)) = \{\langle\ulcorner\psi\urcorner, 1\rangle, \langle\ulcorner Tr(\ulcorner\psi\urcorner)\urcorner, 1\rangle, \langle\neg Tr(\ulcorner\psi\urcorner), 0\rangle, \dots\}$

Operador κ_M: oraciones con Tr y negación como conectiva principal

Si $\phi, \psi \in L_{Tr}$, ϕ es el nombre de $\neg Tr(\ulcorner \psi \urcorner)$, 1 es el valor de ψ en M_B
$\Rightarrow$ entonces $\langle \ulcorner \neg Tr(\ulcorner \psi \urcorner) \urcorner, 0 \rangle$ estará en el punto fijo de κ_M

Esto presenta dos casos: (1) $g = \emptyset$ y (2) $g \neq \emptyset$ y $g \neq \kappa_M(g)$
Ejemplo del primer caso

- $g = \emptyset$
- $\kappa_M(g) = \{\langle \ulcorner \psi \urcorner, 1 \rangle, \dots\}$
- $\kappa_M(\kappa_M(g)) = \{\langle \ulcorner \psi \urcorner, 1 \rangle, \langle \ulcorner Tr(\ulcorner \psi \urcorner) \urcorner, 1 \rangle \dots\}$
- $\kappa_M(\kappa_M(g)) = \{\langle \ulcorner \psi \urcorner, 1 \rangle, \langle \ulcorner Tr(\ulcorner \psi \urcorner) \urcorner, 1 \rangle, \langle \neg Tr(\ulcorner \psi \urcorner), 0 \rangle, \dots\}$

Ejemplo del segundo caso

- $g = \{\langle \ulcorner \psi \urcorner, 0 \rangle\}$
- $\kappa_M(g) = \{\langle \ulcorner \psi \urcorner, 1 \rangle, \dots\}$
- $\kappa_M(\kappa_M(g)) = \{\langle \ulcorner \psi \urcorner, 1 \rangle, \langle \ulcorner Tr(\ulcorner \psi \urcorner) \urcorner, 1 \rangle \dots\}$
- $\kappa_M(\kappa_M(g)) = \{\langle \ulcorner \psi \urcorner, 1 \rangle, \langle \ulcorner Tr(\ulcorner \psi \urcorner) \urcorner, 1 \rangle, \langle \neg Tr(\ulcorner \psi \urcorner), 0 \rangle, \dots\}$

Operador κ_M: oraciones con Tr y disyunción como conectiva principal

Si $\phi, \psi, \chi \in L_{Tr}$, ϕ es el nombre de $Tr(\ulcorner\psi\urcorner) \vee Tr(\ulcorner\chi\urcorner)$,
1 es el valor de ψ y 0 el de χ en M_B
$\Rightarrow$ entonces $\langle\ulcorner Tr(\ulcorner\psi\urcorner) \vee Tr(\ulcorner\chi\urcorner)\urcorner, 1\rangle$ estará en el punto fijo de κ_M

Esto presenta dos casos: (1) $g = \emptyset$ y (2) $g \neq \emptyset$ y $g \neq \kappa_M(g)$
Ejemplo del primer caso

- $g = \emptyset$
- $\kappa_M(g) = \{\langle\ulcorner\psi\urcorner, 1\rangle, \langle\ulcorner\chi\urcorner, 0\rangle, \dots\}$
- $\kappa_M(\kappa_M(g)) = \{\langle\ulcorner\psi\urcorner, 1\rangle, \langle\ulcorner\chi\urcorner, 0\rangle, \langle\ulcorner Tr(\ulcorner\psi\urcorner)\urcorner, 1\rangle, \langle\ulcorner Tr(\ulcorner\chi\urcorner)\urcorner, 0\rangle, \dots\}$
- $\kappa_M(\kappa_M(g)) =$
  $\{\langle\ulcorner\psi\urcorner, 1\rangle, \langle\ulcorner\chi\urcorner, 0\rangle, \langle\ulcorner Tr(\ulcorner\psi\urcorner)\urcorner, 1\rangle, \langle\ulcorner Tr(\ulcorner\chi\urcorner)\urcorner, 0\rangle, \langle\ulcorner Tr(\ulcorner\psi\urcorner) \vee Tr(\ulcorner\chi\urcorner)\urcorner, 1\rangle, \dots$

Operador κ_M: oraciones con Tr y disyunción como conectiva principal

Si $\phi, \psi, \chi \in L_{Tr}$, ϕ es el nombre de $Tr(\ulcorner \psi \urcorner) \vee Tr(\ulcorner \chi \urcorner)$, 1 es el valor de ψ y 0 el de χ en M_B
$\Rightarrow$ entonces $\langle \ulcorner Tr(\ulcorner \psi \urcorner) \vee Tr(\ulcorner \chi \urcorner) \urcorner, 1 \rangle$ estará en el punto fijo de κ_M

Esto presenta dos casos: (1) $g = \emptyset$ y (2) $g \neq \emptyset$ y $g \neq \kappa_M(g)$

Ejemplo del primer caso

- $g = \emptyset$
- $\kappa_M(g) = \{\langle \ulcorner \psi \urcorner, 1 \rangle, \langle \ulcorner \chi \urcorner, 0 \rangle, \dots\}$
- $\kappa_M(\kappa_M(g)) = \{\langle \ulcorner \psi \urcorner, 1 \rangle, \langle \ulcorner \chi \urcorner, 0 \rangle, \langle \ulcorner Tr(\ulcorner \psi \urcorner) \urcorner, 1 \rangle, \langle \ulcorner Tr(\ulcorner \chi \urcorner) \urcorner, 0 \rangle, \dots\}$
- $\kappa_M(\kappa_M(g)) = \{\langle \ulcorner \psi \urcorner, 1 \rangle, \langle \ulcorner \chi \urcorner, 0 \rangle, \langle \ulcorner Tr(\ulcorner \psi \urcorner) \urcorner, 1 \rangle, \langle \ulcorner Tr(\ulcorner \chi \urcorner) \urcorner, 0 \rangle, \langle \ulcorner Tr(\ulcorner \psi \urcorner) \vee Tr(\ulcorner \chi \urcorner) \urcorner, 1 \rangle, ..$

Ejemplo del segundo caso

- $g = \{\langle \ulcorner \psi \urcorner, 0 \rangle, \langle \ulcorner \chi \urcorner, 1 \rangle\}$
- $\kappa_M(g) = \{\langle \ulcorner \psi \urcorner, 1 \rangle, \langle \ulcorner \chi \urcorner, 0 \rangle, \dots\}$
- $\kappa_M(\kappa_M(g)) = \{\langle \ulcorner \psi \urcorner, 1 \rangle, \langle \ulcorner \chi \urcorner, 0 \rangle, \langle \ulcorner Tr(\ulcorner \psi \urcorner) \urcorner, 1 \rangle, \langle \ulcorner Tr(\ulcorner \chi \urcorner) \urcorner, 0 \rangle, \dots\}$
- $\kappa_M(\kappa_M(g)) = \{\langle \ulcorner \psi \urcorner, 1 \rangle, \langle \ulcorner \chi \urcorner, 0 \rangle, \langle \ulcorner Tr(\ulcorner \psi \urcorner) \urcorner, 1 \rangle, \langle \ulcorner Tr(\ulcorner \chi \urcorner) \urcorner, 0 \rangle, \langle \ulcorner Tr(\ulcorner \psi \urcorner) \vee Tr(\ulcorner \chi \urcorner) \urcorner, 1 \rangle, ..$

Tarea

Supongamos que partimos de un lenguaje de base en el que son formulables todas las oraciones aritméticas. Asumamos, también, que sabemos el valor de verdad de ciertas oraciones aritḿeticas muy simples como "1+1=2" y "2+2=5".
Por último, sabemos que la oración del Mentiroso (cuyo código es $\ulcorner\lambda\urcorner$) no puede ser ni verdadera ni falsa bajo ninguna interpretación aceptable del predicado *Tr*.
Asimismo, sabemos que la oración del Honesto (cuyo código es $\ulcorner\tau\urcorner$) puede ser o bien verdadera, o bien falsa, o bien indeterminada.

¿Qué valor de verdad x debe recibir cada una de estas oraciones, y en qué aplicación del operador salto κ_M si partimos de la valuación $g = \emptyset$?

1. $1 + 1 = 2$
2. $Tr(\ulcorner 1 + 1 = 2\urcorner)$
3. $Tr(\ulcorner 1 + 1 = 2\urcorner) \vee 2 + 2 = 5$
4. $Tr(\ulcorner 1 + 1 = 2 \vee Tr(\ulcorner 2 + 2 = 5\urcorner)\urcorner)$
5. $Tr(\ulcorner\lambda\urcorner) \vee 1 + 1 = 2$
6. $Tr(\ulcorner\tau\urcorner) \wedge 1 + 1 = 2$
7. $Tr(\ulcorner Tr(\ulcorner\tau\urcorner) \wedge 1 + 1 = 2\urcorner)$
8. $Tr(\ulcorner\tau\urcorner) \wedge Tr(\ulcorner 1 + 1 = 2\urcorner)$
9. $Tr(\ulcorner Tr(\ulcorner\tau\urcorner) \wedge Tr(\ulcorner 1 + 1 = 2\urcorner)\urcorner)$