Seminario

La Lógica de la Verdad

Eduardo Alejandro Barrio
Universidad de Buenos Aires
eabarrio@gmail.com

Lunes de 19 a 23 - 1er Cuatrimestre de 2014

Sitio del Seminario: Logic Group of Buenos Aires

http://www.ba-logic.com/courses/logicaverdad

Alfred Tarski

Lecturas

Unidad 1:

- Tarski, A. (1933) “Pojecie prawdy wjezkach nauk dedukcyjnych”, traducido al inglés como Tarski, A. (1935) “The Concept of Truth in Formalized Languages”, en Tarski, A. (1956).
- Barrio, E *La Lógica de la Verdad (Buenos Aires, Eudeba, 1998), Introducción y Capítulo 1.*

Complementarias:

Barrio, E *La Verdad Desestructurada (Buenos Aires, Eudeba, 1998)*

Estructura del Capítulo 1

Objetivo General: exponer el método modelo-teórico tarskiano para definir el predicado veritativo de distintos lenguajes.

(i) Dar una presentación intuitiva de las definiciones tarskianas de la verdad

(ii) Ofrecer definiciones con y sin dominios para diversos lenguajes (LCC - FOL - HOL)

(iii) Presentar el Teorema de la Indefinibilidad de la Verdad: (lenguajes de tipo infinito - PA)

(iv) Exponer una teoría axiomática de la verdad: T(PA)

Auto-referencia

Definiciones tarskianas de la verdad

Método para definir predicados veritativos.
El lenguaje LCC (Cálculo de Clases):
Toda clase está incluida en otra: $\forall x_1 \exists x_5 (Ix_1x_5)$
LCC es un lenguaje interpretado
Interpretar es reinterpretar:
Doble proceso:

abstracción	$\forall x_1 \exists x_5 (\mathbf{X}x_1x_5)$	Función Formular
interpretación	Asignar valores a X desde una secuencia	

Definiciones tarskianas de la verdad

Metalenguaje ML:

¿qué recursos expresivos tiene que tener un metalenguaje para dar una definición extensionalmente correcta de verdad?

LCC+

Una lógica subyacente.

Mecanismo para generar nombres de oraciones

Un predicado veritativo

Recursos de la teoría de clases y recursos de la teoría de números para formular las secuencias

Definiciones tarskianas de la verdad

Metalenguaje ML:
Tarski muestra como definir en LCC+, de una manera precisa, las nociones de
- *fórmula*,
- *una variable x_n aparece libre en una fórmula F,*
- *secuencia apropiada de objetos,*
- *denotación de un término del cálculo de clases con respecto a una secuencia*.

Definiciones tarskianas de la verdad

Objetivo: Definir:

F es satisfecha por la secuencia *g* cuando *F* es verdadera si interpretamos la variable x_n que aparece en *F* como si fuera el nombre de la clase que aparece en el lugar n de la secuencia *g*..

Formalmente, podemos formular desde LCC+, la definición recursiva de este concepto:

La secuencia infinita de clases *g* satisface la función formular *F* si y sólo si *g* y *F* son tales que

o bien (i) existen números naturales n y m tales que F = ‘$Ix_n\, x_m$’ y $g_n \subseteq g_m$

o bien (ii) hay una función formular *G* tal que *F* = ‘¬*G* ‘ y *g* no satisface *G*,

o bien (iii) hay funciones formulares *G* y *H* tales que *F* = ‘*G* ∨ *H* ‘ y *g* satisface *G* o *g* satisface *H*

o finalmente (iv) hay un número natural *n* y una función formular *G* tales que *F* = ‘$\forall x_n$ G’ y toda secuencia infinita de clases que difiera de *g* a lo sumo en el *n-ésimo* lugar satisface la fórmula *G.*

Una secuencia *g* satisface una función oracional *F* del lenguaje de clases sólo si (i)-(iv) garantizan que lo hace.

Definiciones tarkianas de la verdad

Definición de *ser verdadera una oración del lenguaje de clases:*

Una oración A del lenguaje de clases es verdadera si y sólo si su función oracional A*'* es satisfecha por toda secuencia apropiada para el lenguaje de clases.

Esto es,

'*Tr* ('A') si y sólo si A` es satisfecha por toda secuencia apropiada para el lenguaje de clases.

Definiciones tarskianas de la verdad

Definición Explícita de Verdad:

La secuencia infinita g satisface una fórmula *F* del lenguaje de clases si y sólo si hay una relación binaria *R* entre secuencias y fórmulas tal que se cumplen las siguientes condiciones:

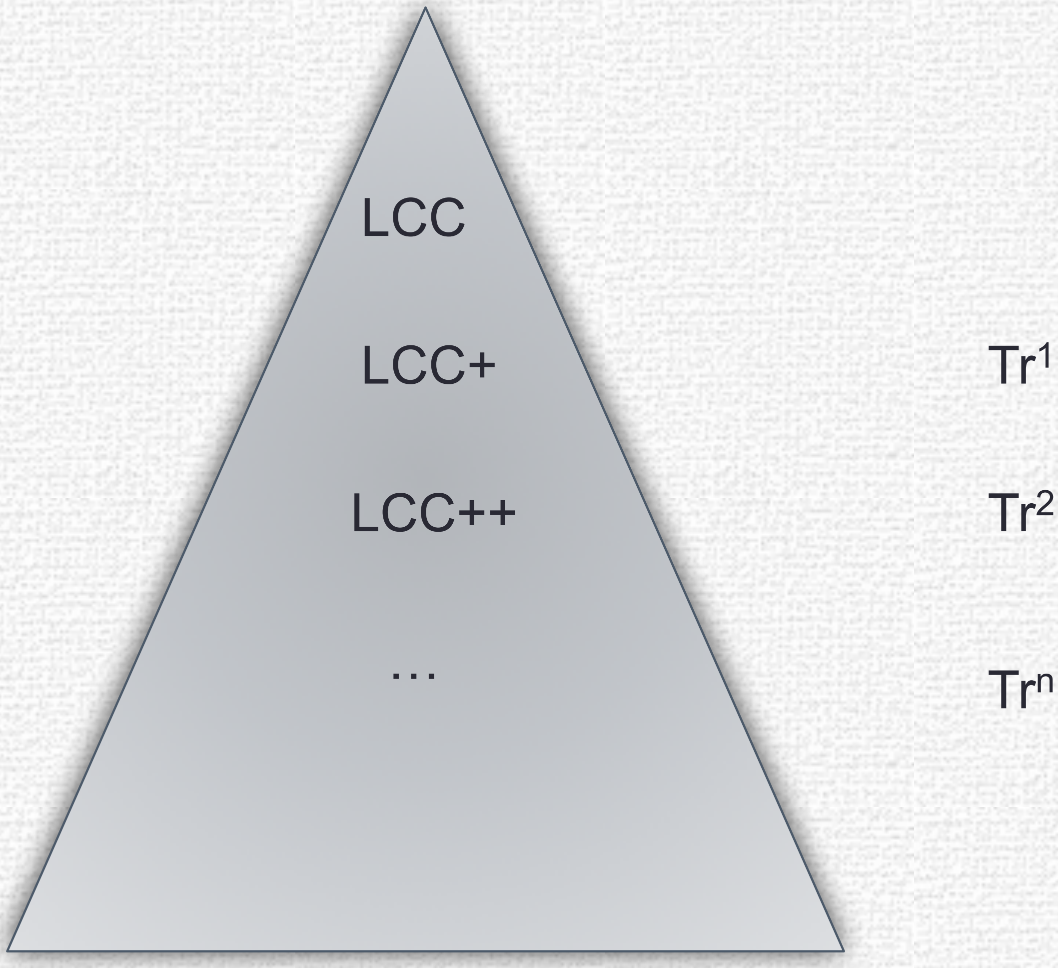
(c) si existen números naturales n y m tales que G = ‘ $Ix_n\ x_m$ ‘ y $g_n \subseteq g_m$, entonces <*g*, *G*> pertenece a *R.*

(d) si <*g*, *G*> no pertenece a *R,* entonces <*g*, ‘ ¬*G* ‘ > pertenece a *R*,

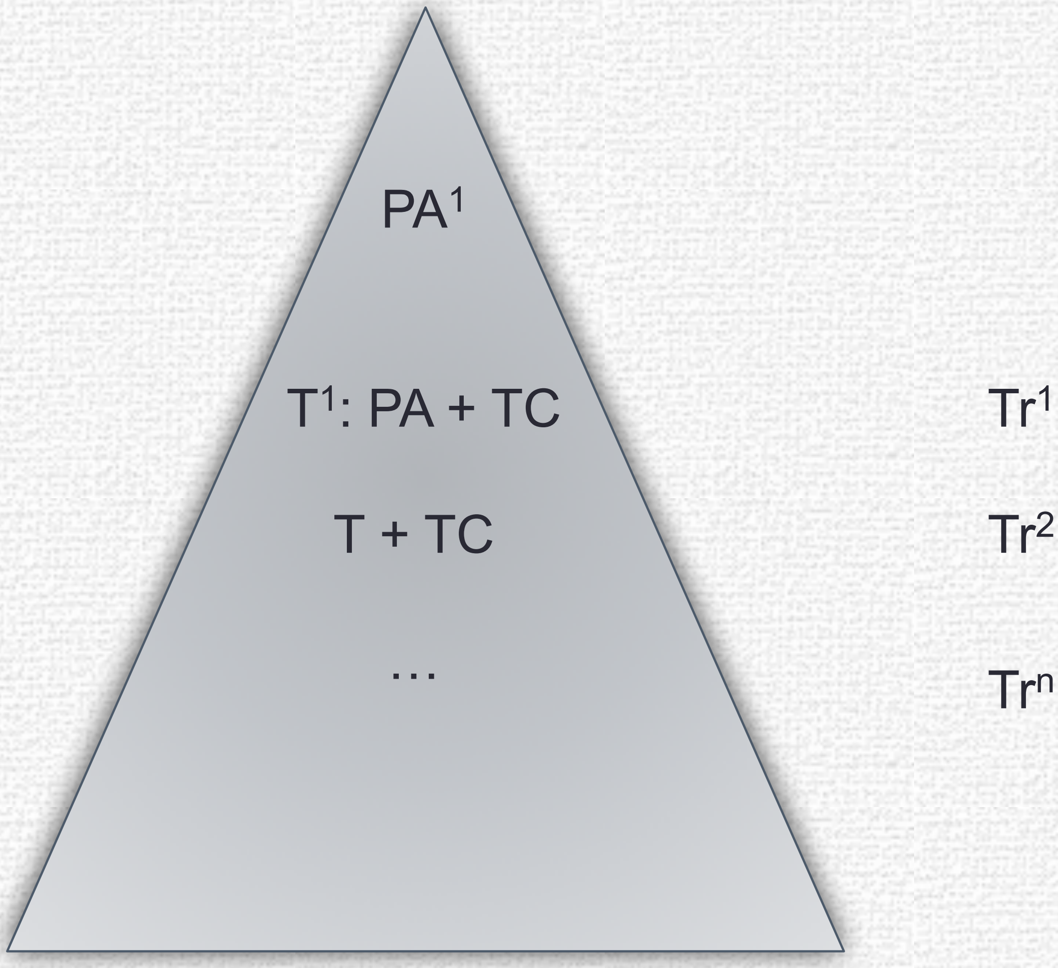
(e) si <*g*, *G*> pertenece a *R,* o <*g*, *H*> pertenece a *R,* entonces <*g*, ‘*G* ∨ *H* ’ > pertenece a *R*.

(f) para todo número natural *n* y una fórmula *G,* si toda secuencia infinita de clases *g*` que difiera de la secuencia *g* a lo sumo en el *n-ésimo* lugar es tal que <*g*´, *G* > pertenece a *R,* entonces <*g*, ‘$\forall x^n$ G ‘ > pertenece a *R.*

Jerarquías tarskianas



Jerarquías tarskianas



Definiciones tarskianas de la verdad

La verdad relativa a un modelo M (Substitucional) $<D, V_M>$

un modelo para LP0 especifica una interpretación I tal que:

1. Un conjunto no vacío D (dominio) sobre el cual las variables tienen alcance
2. Para cada constante c_i, un objeto o tal que $o \in D$.
3. Para cada predicado P_i , un conjunto A tal que $A \subseteq D$.

La noción de verdad relativa a un modelo (V_M) se define recursivamente de la siguiente manera:

(i)Si $Pa_1... a_n$ es una fórmula atómica de L, $V_M(<Aa_1... a_n>) = 1$ sii $<I(a_1),..., I(a_n)> \in I(P)$

(ii)V_M (‘¬A’) = 1 sii V_M (‘A’) = 0

(iii)V_M (‘A∧B‘) = 1 sii V_M (‘A’) =1 y V_M (‘B’) =1

(iv)V_M(‘A∨B’) = 1 sii V_M (‘A’) =1 o V_M (‘B’) =1

(v)V_M (‘A⊃B’) = 1 sii V_M (‘A’) = 0 o V_M (‘B’) =1

(vi)V_M (‘∀xA’) = 1 sii para toda constante c de L, se da que V_M ([c/x] A) = 1

(vii)V_M (‘∃xA’) = 1 sii para al menos una constante c de L, se da que V_M ([c/x] A) = 1

Si V_M (‘A’) = 1, entonces A es verdadera en el modelo M.

Definiciones tarskianas de la verdad

Modelos por asignación $<D, V_{M\,g}>$

Si M es un modelo, *D* su dominio, *I* su función de interpretación y *g* una asignación en *D*, entonces se define la satisfacción del modelo y la asignación de la siguiente manera:

i. $V_{M\,g}(Pt_1 \ldots t_n) = 1$ sii $<[t_1]_{M,g}, \ldots, [t_n]_{M\,g}> \in I(P)$

ii. $V_{M\,g}$ (‘¬A’) = 1 sii $V_{M\,g}$ (‘A’) = 0

iii. $V_{M\,g}$ (‘A∧B ‘) = 1 sii $V_{M\,g}$ (‘A’) =1 y $V_{M\,g}$ (‘B’) =1

iv. $V_{M\,g}$(‘A∨B’) = 1 sii $V_{M\,g}$ (‘A’) =1 o $V_{M\,g}$ (‘B’) =1

v. $V_{M\,g}$ (‘A⊃B’) = 1 sii $V_{M\,g}$ (‘A’) = 0 o $V_{M\,g}$ (‘B’) =1

vi. $V_{M\,g}$(‘∀xA’) = 1 sii para toda asignación *g'* idéntica a *g* excepto quizás en lo que asigna a x, se da que $V_{M\,g'}$(‘A’) = 1

vii. $V_{M\,g}$(‘∃xA’) = 1 sii para alguna asignación *g'* idéntica a *g* excepto quizás en lo que asigna a x, se da que $V_{M\,g'}$(‘A’) = 1.

Si $V_{M\,g}$ (‘*A*’) = 1, entonces α es verdadera en el modelo M.

Definiciones tarskianas de la verdad

Modelos Substitucionales

Validez Universal:

A *es universalmente válida* si y sólo si para todo modelo (substitucional) M, V_M (‘A’): 1.

Consecuencia Lógica:

A es una *consecuencia semántica* de Γ si y sólo si para todo modelo M, la V_M (Γ): 1, entonces V_m (‘A’): 1

Modelos por asignación

Validez Universal:

A es *universalmente válida* si y sólo si para todo modelo M, $V_{M\,g}$ (‘A’): 1.

Consecuencia Lógica:

A es una consecuencia semántica de Γ si y sólo si para todo modelo M, la $V_{M\,g}$ (Γ): 1, entonces $V_{m\,g}$ (‘A’): 1

Definiciones tarskianas de la verdad

Comparación

- Definiciones con y sin dominio

De dónde salen las secuencias y sus objetos?

¿Hay un dominio universal?

All-in-one

All-in-many

¿Cuáles son las verdades lógicas y cuáles las matemáticas?

"Hay al menos dos objetos" $\exists x\ \exists y\ \neg\ (x = y)$

- Definiciones absolutas vs definiciones relativas de verdad

Definiciones de verdad para lenguajes de orden superior

Definición de verdad relativa a un modelo para el lenguaje de orden superior

$(\exists P^2) (\forall x^1) (P^2 x^1)$ Hay una propiedad que todos la tienen

$(\forall P^2) (\exists x^1) (P^2 x^1)$ Toda propiedad la tiene algún individuo

Riqueza expresiva:

El rango para las g es el conjunto potencia de D^n .

Si el D es Alef$_0$, las secuencias tendrán un “tamaño” no numerable.

Hay incontables valores para las variables de segundo orden.

Definiciones de verdad para lenguajes de orden superior

Definición de verdad relativa a un modelo para el lenguaje de orden superior

La definición de $V_{M,g}$ para un LPO se amplía incorporando las siguientes cláusulas:

i. $V_{M,g}$ $(Xt_1 \ldots t_n) = 1$ sii $<[t_1]_{M,g}, \ldots, [t_n]_{M,g}> \in g(X)$.

ii. $V_{M,g}$ ('$\forall$XA') = 1 sii para toda asignación *g′* idéntica a *g* excepto quizás en lo que asigna a X, se da $V_{M,g'}$('A') = 1.

iii. $V_{M,g}$ ('$\exists$XA') = 1 sii para alguna asignación *g′* idéntica a *g* excepto quizás en lo que asigna a X, se da $V_{M,g'}$('A') = 1.

Nótese que en i. la función de asignación crucialmente asigna un número no numerable de valores a X. Análogo es su comportamiento en las restantes cláusulas.

Definiciones de verdad para lenguajes de orden superior

A es lógicamente verdadera ssi $V_{M,g}$ (‘A’): 1 en todo modelo estándar.

Del mismo modo,

A es una consecuencia semántica de Γ ssi para todo modelo estándar $V_{M,g}$ (Γ): 1 entonces $V_{M,g}$ (‘A’): 1

Definiciones de verdad para lenguajes de orden superior

La noción de *validez universal* en los lenguajes de orden superior es intratable como resultado de la riqueza expresiva de tales lenguajes. - No hay ningún sistema axiomático finitista que pueda tener suficiente capacidad de prueba como para demostrar como teoremas todas las fórmulas universalmente válidas.

Definiciones de verdad para lenguajes de orden superior

La lógica de orden superior ***no es compacta***. La prueba de Henkin no se generaliza para el caso de segundo orden. Para definir un modelo canónico para el conjunto Γ^{Max} en el caso de segundo orden, hay que agregar la siguiente cláusula a la función de valuación V_M:

- Si Γ^{Max} contiene ∃x A(x) entonces contiene φ(a) para alguna constante a del mismo orden que x.
- Si Γ^{Max} contiene ∃X A(X) entonces contiene φ(R) para alguna constante de predicado R del mismo orden que X.

En ambos casos, se define un dominio desde donde se asignan valores a las expresiones no lógicas y a las variables.

- V_M ('∃X A(X)') = 1 ssi dado el conjunto de todos los subconjuntos del dominio, alguno de ellos satisface A(X).

De esta manera, verdad en términos un modelo definido a partir de Γ^{Max} no necesita ser equivalente a la inclusión en Γ^{Max}.

Por ejemplo, ¬∃X A(X) y por lo tanto, todas las instancias de la forma ¬A(R) para R_i en el lenguaje aumentado pueden ser miembros de Γ^{Max}, pero ∃X A(X) puede ser verdadero en el modelo si algún indefinible subconjunto de D satisface A(X). Por lo tanto, ¬∃X A(X) podría ser falsa aún si todas sus instancias definibles son verdaderas. Es decir, aún que hemos construido un modelo, no tenemos garantías acerca de que es un modelo de Γ^{Max}.

Gracias