Seminario

La Lógica de la Verdad

Eduardo Alejandro Barrio
Universidad de Buenos Aires
eabarrio@gmail.com

Lunes de 19 a 23 - 1er Cuatrimestre de 2014

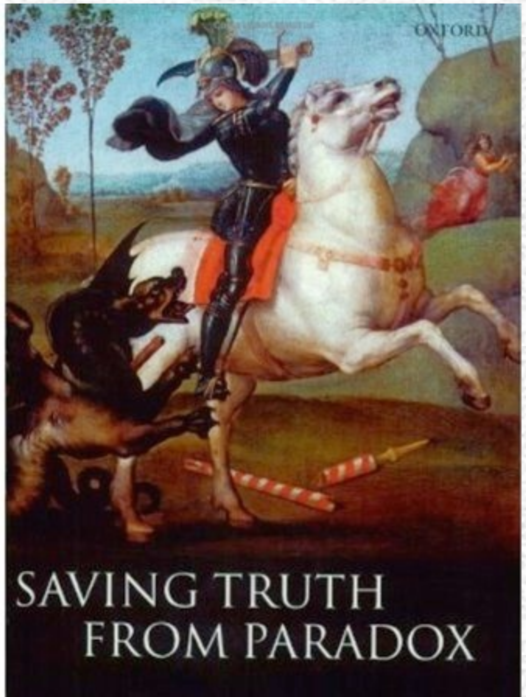
Sitio del Seminario: Logic Group of Buenos Aires

http://www.ba-logic.com/courses/logicaverdad

Lecturas

Unidad 4:

- Barrio, E *La Lógica de la Verdad (Buenos Aires, Eudeba, 2014), Capítulo 4.*



Objetivo:

- Discutir si el enfoque **paracompleto sofisticado** ofrece o no una solución a las revanchas.

Resumen de la teoría de Field

- Usar un lenguaje que permita auto-referencia (PA)

- Permitir que el lenguaje exprese su propio predicado veritativo (no hay niveles de lenguaje).

- Aceptar Transparencia: Para toda A, el reemplazo (en cualquier contexto no-opaco) de cualquier oración B por True(⟨B⟩) (y viceversa) produce una oración que es lógicamente equivalente a A.

- Usar el enfoque de puntos fijos de Kripke para definir que fórmulas resultan verdaderas.

- Introducir en el lenguaje un nuevo condicional: Hay dos condicionales en el lenguaje: el material "$\supset$" y "$\rightarrow$"

- Usar semántica de revisión (Gupta y Belnap) para el nuevo condicional.

El enfoque de Field y el Condicional

Paso 1: v0 es una valuación transparente, por ejemplo, una que asigne ½ a todos los condicionales.
Paso 2: Se construye un punto fijo que, por la observación trivial, obedece intersustitutividad.
El punto fijo no hace verdadero a ningún condicional, ni siquiera $A \rightarrow A$.
Paso 3: Se inicia la secuencia de revisión siguiendo la siguiente regla:

$$|A \rightarrow B|_{s,\alpha+1} = \begin{cases} 1 & \text{if } |A|_{s,\alpha} \leq |B|_{s,\alpha} \\ 0 & \text{if } |A|_{s,\alpha} > |B|_{s,\alpha} \end{cases}$$

La regla límite para ordinales λ es

$$|A \rightarrow B|_{s,\lambda} = \begin{cases} 1 & \text{if } \exists\beta<\alpha\forall\gamma(\beta<\gamma\leq\alpha \rightarrow |A|_{s,\gamma} \leq |B|_{s,\gamma}) \\ 0 & \text{if } \exists\beta<\alpha\forall\gamma(\beta<\gamma\leq\alpha \rightarrow |A|_{s,\gamma} > |B|_{s,\gamma}) \\ \tfrac{1}{2} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Es decir, va a 1 si a partir de un punto de la secuencia el antecedente es menor o igual al consecuente, va a 0 si a partir de un punto siempre es mayor, y va a ½ si no pasa ninguna de las dos cosas.
Nótese que los condicionales no pueden recibir ½ en las etapas sucesoras, aunque sí en las límites.

El enfoque de Field y el Condicional

En este proceso, es necesario constatar los valores del antecedente y del consecuente en un conjunto infinito de ordinales previos.

Si a partir de un ordinal δ se da que en todos los ordinales β mayores a δ tenemos que el valor del antecedente en β es menor o igual al del consecuente en ese ordinal, entonces el condicional es verdadero.

Será falso cuando en esa circunstancia, el valor del antecedente es mayor que el del consecuente.

Y quedará indeterminado en cualquier otro caso.

Valor último

En lugar de apelar a la idea de punto fijo para definir verdad, se recurre a la idea de estabilidad:
Si el valor de A se estabiliza en 1 en todos los puntos fijos kripkeanos, entonces el **valor último de A es 1.**
Si el valor de A se estabiliza en 0 en todos los puntos fijos kripkeanos, entonces **el valor último de A es 0.**
Si el valor de A no se estabiliza, **su valor último es 1/2**.

Virtudes de la Semántica

(1) Valida las reglas de Kleene:

Teorema fundamental: Hay ordinales Δ tales que para toda fórmula y toda asignación s $|A|s = |||A|||s$ Dichos ordinales se llaman ***aceptables.***

Teorema fundamental fuerte: Para todo ordinal μ, hay un $\Delta \subseteq \mu$ tal que Δ es aceptable.

(2) Los valores últimos de los condicionales están determinados por los valores últimos de sus componentes

1- Si $|||A|||s=0$ o $|||B|||s=1$, entonces $|||A\rightarrow B|||s=1$
2- Si $|||A|||s=1$ y $|||B|||s=0$, entonces $|||A\rightarrow B|||s=0$
3- Si $|||A|||s=1$ y $|||B|||s=\frac{1}{2}$, entonces $|||A\rightarrow B|||s$ puede ser ½ o 0
4- Si $|||A|||s=\frac{1}{2}$ y $|||B|||s=0$, entonces $|||A\rightarrow B|||s$ puede ser ½ o 0
5- Si $|||A|||s=\frac{1}{2}$ y $|||B|||s=\frac{1}{2}$, entonces $|||A\rightarrow B|||s$ puede ser ½ o 1

(3) Valida intersustitutividad de equivalentes.

Teorema de intersustitutividad de equivalentes: Sea X_A una fórmula que contiene a A como subfórmula y X_B el resultado de reemplazar una o más ocurrencias de A por B. Si para toda s $|||A\leftrightarrow B|||s=1$, entonces $|||X_A\leftrightarrow X_B|||s=1$

Algunos problemas

Tres problemas que afectan a la teoría original de Field:

1) **Problema de la arbitrariedad**: la teoría asigna verdad a oraciones que razonablemente podrían ser falsas.
Por ejemplo, el honesto condicional: $H \leftrightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow Tr(H)$
Sin embargo, otro honesto condicional: $H \leftrightarrow (2=2) \rightarrow Tr(H)$ (recibe 0)

2) **Problema de la infundación:** La teoría asigna 1 a ciertas oraciones infundadas.
Secuencias de condicionales tales que para cada n, $An \leftrightarrow Tr(An) \rightarrow Tr(An+1)$

3) **Problema de la estrechez**: se validan ciertos bicondicionales indeseables:
$M \leftrightarrow \neg M$, $H \leftrightarrow \neg H$, $M \leftrightarrow \neg H$, $\neg M \leftrightarrow H$ (a causa de validar el esquema T).

Venganzas

Una teoría que intente expresar la noción de *tener el valor designado* está en problemas.

$Q \leftrightarrow \neg Des('Q')$ Yo no tengo el valor designado

Supongamos que Q tenga el valor designado. Entonces Q tiene valor designado ssi $\neg Des('Q')$ lo tiene. Pero si Q tiene valor designado, Des('Q') también. Por lo cual $\neg Des('Q')$ no debería tenerlo.

Por eso, Q no tiene el valor designado. Pero si Q no tiene el valor designado $\neg Des('Q')$ lo tiene. Pero eso contradice el bicondicional de arriba. Por ende, dado que Q tiene el valor designado o no lo tiene, llegamos a un absurdo

Determinación

Nuevo operador:

A es determinadamente verdadera:

$D(A) =_{def} A \wedge \neg(A \rightarrow \neg A)$.

1. Cláusulas

   a) Si $|A|_M \leq |B|_M$, entonces $|DA|_M \leq |DB|_M$ [corresponde a $A \rightarrow B \vDash DA \rightarrow DB$]

   b) Si $|A|_M = 1$, entonces $|DA|_M = 1$ [corresponde a $A \vDash DA$]

   c) w: $|DA|_M \leq |A|_M$ [corresponde a $DA \vDash A$

   d) Si $|A|_M \leq |\neg A|_M$, entonces $|DA|_M = 0$

Enfrentando las venganzas

D puede ser usado para clasificar a la oración del mentiroso como ni determinadamente verdadera ni determinadamente falsa.

Una oración Q que puede probarse equivalente a ‘Q no es determinately true’ no es determinately determinately verdadera.

$Q \leftrightarrow \neg D('Q')$ Yo no tengo el valor determinado

1.- Sup $D('Q')$ vale 0. 2.- $\neg D('Q')$ vale 1 (neg)

3.- Q vale 1 4.- $D('Q')$ vale 1 (cláusula b)

5.- Absurdo 6.- $D('Q')$ no vale 0. 7.- $Q \nleq \neg('Q')$ (cláusula d)

8.- $Q \nleq \neg\neg D('Q')$ (cláusula d) 9.- $Q \nleq D('Q')$ (doble negación)

10.- $DQ \nleq Q$ (cláusula c)

11.- $DQ < Q$ (la aplicación de D disminuye el valor de Q sin llegarlo a 0.

12.- $DQ \nleq \neg D('Q')$ (cláusula c)

13.- DDQ vale 0 (cláusula d)

El problema se resuelve porque DQ le baja el valor a Q y DDQ directamente da 0-

Enfrentando las venganzas

Mentiroso transfinito

$Q \leftrightarrow \neg D^{\alpha}\,('Q')$ Yo no tengo el valor determinado α veces.

1.- Sup $D^{\alpha}(Q)$ vale 0.

2.- $\neg D^{\alpha}('Q')$ vale 1 (neg)

3.- Q vale 1

4.- $D('Q')$ vale 1, DD(Q) también vale 1, DDD alfa veces también vale 1.

5.- Absurdo

6.- $D^{\alpha}('Q')$ no vale 0.

7.- $D^{\alpha}Q \leqq Q)$ (cláusula c)

8.- $D^{\alpha}Q \leqq \neg D^{\alpha}('Q')$

9.-$D^{\alpha+1}Q$ vale 0 por (cláusula d)

$D^{\alpha+1}$ es más fuerte que que D^{α}

En resumen:para cualquier Q^{α} *dado, la oración* $D^{\alpha}Q$ se hace cada vez más fuerte a medida que la iteración se incrementa hasta llegar a α+1. En ese momento, no hay más reforzamiento al agregar D, porque la oración vale ya 0.

Enfrentando las venganzas

¿Podría agregarse un predicado *tener un valor último distinto de 1*?

Podríamos construir una oración A que diga de su valor semántico que no es 1. Pero, dado que vale el esquema T, tenemos que $Tr(|A| \neq 1) \leftrightarrow |A| \neq 1$. Pero, esto muestra que nuestro predicado no significa *tener un valor último distinto de 1.*

La Paradoja del Mentiroso

[1]	M ↔ ¬ Tr('M')	
[2]	Tr('M') v ¬ Tr('M')	LEM
[3]	Tr('M')	Sup caso 1
[4]	M	Liberación de [3]
[5]	¬ Tr('M')	Def. M [4]
[6]	Tr('M') ∧ ¬ Tr('M')	I ∧ [3] [5]
[7]	¬ Tr('M')	Sup caso 2
[8]	M	Def. M [7]
[9]	Tr('M')	Captura [8]
[10]	Tr('M') ∧ ¬ Tr('M')	I ∧ [7] [9]
[11]	Tr('M') ∧ ¬ Tr('M')	E v [2] [6] [10]
[12]	B	EFQ [11]

La transparencia y la lógica

Si se cumplen **dos condiciones**:

- Hay un predicado Tr que cumple <u>Captura</u> y <u>Liberación</u>.

- Razonamiento por casos vale.

Ningún operador <u>**Op**</u> puede cumplir:

- <u>Tercer Excluido</u>: **LEM**: $\vdash A \vee \underline{\mathbf{Op}}A$ **BIV**: $\vdash Tr(`A') \vee Tr(`\underline{\mathbf{Op}}A')$

- <u>Explosión</u>: **EFQ:** $Tr(`A') \wedge \underline{\mathbf{Op}}Tr(`A') \vdash B$ **PNC:** $\vdash \neg (Tr(`A') \wedge \underline{\mathbf{Op}}Tr(`A'))$

(Explosión y Silogismo Disyuntivo son equivalentes)

Un condicional Razonable?

- Las siguientes inferencias no son válidas en el enfoque de Field:

(a) $A \rightarrow (B \rightarrow C) \therefore B \rightarrow (A \rightarrow C)$

(b) $A \rightarrow (B \rightarrow C) \therefore (A \wedge B) \rightarrow C$

(c) $(A \wedge B) \rightarrow C \therefore A \rightarrow (B \rightarrow C)$

(d) $A \rightarrow (A \rightarrow C) \therefore A \rightarrow C$

Falla el teorema de la deducción: Si $\Gamma, A \vDash B$, entonces $\Gamma \vDash A \rightarrow B$ (donde $\vDash$ indica la relación de consecuencia lógica de acuerdo a la semántica de Field).

$A \rightarrow (A \rightarrow B) \nvDash (A \rightarrow B)$ Contracción1

$\nvDash A \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$ Contracción2

$\nvDash (A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$ Pseudo Modus Ponens.

$\nvDash (A \wedge \neg A) \rightarrow B$ Explosión (no se necesita evitarla)

La Paradoja de Curry

Curry $C \leftrightarrow (Tr(\text{‘}C\text{’}) \rightarrow A)$

Principios básicos de los condicionales como **Modus Ponens** y **Contracción** parecen no funcionar en contextos donde el predicado veritativo es usado transparentemente.

Cuantificaciones Restringidas

$\vDash \forall x Ax \rightarrow \forall x(Bx \rightarrow Ax)$

$\vDash (Ao \land \forall x(Ax \rightarrow Bx)) \rightarrow Bo$

$\vDash (\forall x(Ax \rightarrow Bx) \land \forall x(Ax \rightarrow Cx)) \rightarrow \forall x(Ax \rightarrow (Bx \land Cx))$

$\vDash \forall x(Ax \rightarrow Bx) \rightarrow (\forall x(Cx \rightarrow Ax) \rightarrow \forall x(Cx \rightarrow Bx))$

$\vDash \neg\forall x(Ax \rightarrow Bx) \rightarrow \exists x(Ax \land \neg Bx)$

$\vDash \forall x(Ax \rightarrow Bx) \rightarrow \forall x(\neg Bx \rightarrow \neg Ax)$

$\vDash \forall x \neg Ax \rightarrow \forall x(Ax \rightarrow Bx)$

$\vDash \forall x(Ax \rightarrow Bx) \land \neg Bo \rightarrow \neg Ao.$

$\exists x(Ax \land \neg Bx) \vDash \neg\forall x(Ax \rightarrow Bx)$

$\forall x Bx \vDash \forall x(Ax \rightarrow Bx)$

$\forall x(Ax \rightarrow Bx) \land Ao \vDash Bo$

Gracias