Seminario

La Lógica de la Verdad

Eduardo Alejandro Barrio
Universidad de Buenos Aires
eabarrio@gmail.com

Lunes de 19 a 23 - 1er Cuatrimestre de 2014

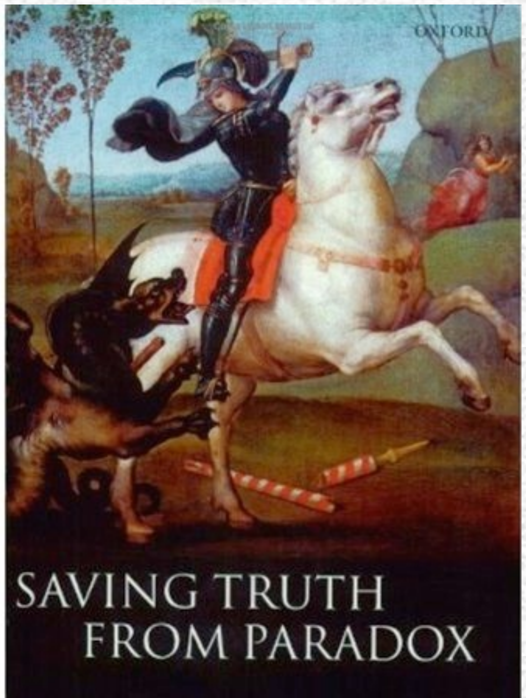
Sitio del Seminario: Logic Group of Buenos Aires

http://www.ba-logic.com/courses/logicaverdad

Lecturas

Unidad 4:

- Barrio, E *La Lógica de la Verdad (Buenos Aires, Eudeba, 2014), Capítulo 4.*



Referencias

(i) Hartry Field (2002) ‘Saving the Truth Schema from Paradox’ *Journal of Philosophical Logic* 31

(ii) Hartry Field (2003) ‘A Revenge-Immune Solution to the Semantic Paradoxes’ *J. of Phil. Logic* 32

(iii) Hartry Field (2007) ‘Solving the paradoxes, escaping revenge’ en Beall (2007)

(iv) Hartry Field (2008) *Saving Truth from Paradox*

(v) Hannes Leitgeb “On the metatheory of Field’s Solving the Paradoxes, Escaping Revenge” en Beall (2007)

(vi) G. Priest (2007) “Revenge, Field, and ZF” en Beall (2007) y (2010) “Hopes Fade For Saving Truth” *Philosophy* 85

(vii) Agustín Rayo & Philip Welch “Field on Revenge” en Beall (2007)

(viii) Varios “Precis of saving truth from paradox” *Philos Stud* (2010) 147. Field, McGee, Restall, Shapiro. Field’s replies.

(ix) Varios “Precis of saving truth from paradox” *THE REVIEW OF SYMBOLIC LOGIC* 4, 3, (2011), Field, Martin, Welch.

(x) Cantini, A. (2010) “Review on Saving truth from paradox”, *Erkenntnis* 72.

(xi) Bacon, A. (2011) “A new conditional for naïve truth theory”

Objetivos de la teoría de Field

- Usar un lenguaje que permita auto-referencia (PA)

- Permitir que el lenguaje exprese su propio predicado veritativo (no hay niveles de lenguaje).

- Aceptar Transparencia: Para toda A, el reemplazo (en cualquier contexto no-opaco) de cualquier oración B por True(⟨B⟩) (y viceversa) produce una oración que es lógicamente equivalente a A.

- Usar teoría de conjuntos para definir los modelos.

- Usar el enfoque de puntos fijos de Kripke para definir que fórmulas resultan verdaderas.

- Introducir en el lenguaje un nuevo condicional: Hay dos condicionales en el lenguaje: el material "$\supset$" y "$\rightarrow$"

- Usar semántica de revisión (Gupta y Belnap) para el nuevo condicional.

Características del Enfoque de Field

Comencemos con un L equipados con los conectivos clásicos. L carece de predicado veritativo, pero es suficientemente fuerte como para expresar PA.

Ahora, agregamos al lenguaje un predicado veritativo Tr (aplicando técnicas Gödelianas) y un conectivo proposicional '$\rightarrow$' (y un bicondicional '$\leftrightarrow$'), para obtener el lenguaje L+.

El proyecto de Field es dar un procedimiento para extender cualquier interpretación clásica (bivalente) M del lenguaje de base a una interpretación no clásica polivalente M+ del lenguaje extendido tal que:

1. M+ sean idénticos M al asignar 0 o 1 a las fórmulas $L \subset L+$.

2. $\rightarrow$ sea un condicional aceptable.

3. Para cualquier M+, y para cualquier A del lenguaje extendido , '$Tr(\langle A \rangle) \leftrightarrow A$' tiene el valor 1.

Esto quiere decir que Tr se comporta como el predicado naïve.

4. Supongamos que B es una L+-oración, A es una sub-oración de B, y B′ se obtiene de B substituyendo $Tr(\langle A \rangle)$ por A. Entonces M+ da a B′ el mismo valor que a B.

Ya que L+ es auto-referencial, se puede formar Q en L+ tal que Q es equivalente a $\neg Tr(\langle Q \rangle)$. Por eso,

5. Hay una Q, tal que para todo M+, '$\neg Tr(\langle Q \rangle) \leftrightarrow Q$' tiene el valor 1.

6.- Pero, para todo M+, '$Tr(\langle Q \rangle) \leftrightarrow Q$' también tiene el valor 1.

7.- $\nvDash (Q \vee \neg Q)$

El enfoque de Field y el Condicional

Paso 1: v0 es una valuación transparente, por ejemplo, una que asigne ½ a todos los condicionales.
Paso 2: Se construye un punto fijo que, por la observación trivial, obedece intersustitutividad.
El punto fijo no hace verdadero a ningún condicional, ni siquiera $A \rightarrow A$.
Paso 3: Se inicia la secuencia de revisión siguiendo la siguiente regla:

$$|A \rightarrow B|_{s,\alpha+1} = \begin{cases} 1 & \text{if } |A|_{s,\alpha} \leq |B|_{s,\alpha} \\ 0 & \text{if } |A|_{s,\alpha} > |B|_{s,\alpha} \end{cases}$$

La regla límite para ordinales λ es

$$|A \rightarrow B|_{s,\lambda} = \begin{cases} 1 & \text{if } \exists\beta<\alpha\forall\gamma(\beta<\gamma\leq\alpha \rightarrow |A|_{s,\gamma} \leq |B|_{s,\gamma}) \\ 0 & \text{if } \exists\beta<\alpha\forall\gamma(\beta<\gamma\leq\alpha \rightarrow |A|_{s,\gamma} > |B|_{s,\gamma}) \\ \tfrac{1}{2} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Es decir, va a 1 si a partir de un punto de la secuencia el antecedente es menor o igual al consecuente, va a 0 si a partir de un punto siempre es mayor, y va a ½ si no pasa ninguna de las dos cosas.
Nótese que los condicionales no pueden recibir ½ en las etapas sucesoras, aunque sí en las límites.

El enfoque de Field y el Condicional

En este proceso, es necesario constatar los valores del antecedente y del consecuente en un conjunto infinito de ordinales previos.

Si a partir de un ordinal δ se da que en todos los ordinales β mayores a δ tenemos que el valor del antecedente en β es menor o igual al del consecuente en ese ordinal, entonces el condicional es verdadero.

Será falso cuando en esa circunstancia, el valor del antecedente es mayor que el del consecuente.

Y quedará indeterminado en cualquier otro caso.

Valor último

En lugar de apelar a la idea de punto fijo para definir verdad, se recurre a la idea de estabilidad:

Si el valor de A se estabiliza en 1 en todos los puntos fijos kripkeanos, entonces el **valor último de A es 1.**

Si el valor de A se estabiliza en 0 en todos los puntos fijos kripkeanos, entonces **el valor último de A es 0.**

Si el valor de A no se estabiliza, **su valor último es 1/2**.

Teorema Fundamental

Para cualquier ordinal α hay ordinales β mayores a α tal que para cada fórmula A de L+. $P^{\beta}(A)$ es el valor último de A.

Virtudes de la Semántica

(1) Valida las reglas de Kleene:

Teorema fundamental: Hay ordinales Δ tales que para toda fórmula y toda asignación s $|A|s = |||A|||s$
Dichos ordinales se llaman ***aceptables.***

Teorema fundamental fuerte: Para todo ordinal μ, hay un $\Delta \subseteq \mu$ tal que Δ es aceptable.

(2) Los valores últimos de los condicionales están determinados por los valores últimos de sus componentes

1- Si $|||A|||s=0$ o $|||B|||s=1$, entonces $|||A\rightarrow B|||s=1$
2- Si $|||A|||s=1$ y $|||B|||s=0$, entonces $|||A\rightarrow B|||s=0$
3- Si $|||A|||s=1$ y $|||B|||s= ½$, entonces $|||A\rightarrow B|||s$ puede ser ½ o 0
4- Si $|||A|||s=½$ y $|||B|||s=0$, entonces $|||A\rightarrow B|||s$ puede ser ½ o 0
5- Si $|||A|||s=½$ y $|||B|||s=½$, entonces $|||A\rightarrow B|||s$ puede ser ½ o 1

(3) Valida intersustitutividad de equivalentes.

Teorema de intersustitutividad de equivalentes: Sea X_A una fórmula que contiene a A como subfórmula y X_B el resultado de reemplazar una o más ocurrencias de A por B. Si para toda s $|||A\leftrightarrow B|||s=1$, entonces $|||X_A\leftrightarrow X_B|||s=1$

Venganzas

Una teoría que intente expresar la noción de *tener el valor designado* está en problemas.

$Q \leftrightarrow \neg Des('Q')$ Yo no tengo el valor designado

Supongamos que Q tenga el valor designado. Entonces Q tiene valor designado ssi $\neg Des('Q')$ lo tiene. Pero si Q tiene valor designado, Des('Q') también. Por lo cual $\neg Des('Q')$ no debería tenerlo.

Por eso, Q no tiene el valor designado. Pero si Q no tiene el valor designado $\neg Des('Q')$ lo tiene. Pero eso contradice el bicondicional de arriba. Por ende, dado que Q tiene el valor designado o no lo tiene, llegamos a un absurdo

Determinación

Nuevo operador:

A es determinadamente verdadera:

$D(A) =_{def} A \wedge \neg(A \rightarrow \neg A)$.

1. Cláusulas

   a) Si $|A|_M \leq |B|_M$, entonces $|DA|_M \leq |DB|_M$ [corresponde a $A \rightarrow B \vDash DA \rightarrow DB$]

   b) Si $|A|_M = 1$, entonces $|DA|_M = 1$ [corresponde a $A \vDash DA$]

   c) w: $|DA|_M \leq |A|_M$ [corresponde a $DA \vDash A$

   d) Si $|A|_M \leq |\neg A|_M$, entonces $|DA|_M = 0$

Enfrentando las venganzas

D puede ser usado para clasificar a la oración del mentiroso como ni determinadamente verdadera ni determinadamente falsa.

Una oración Q que puede probarse equivalente a ‘Q no es determinately true’ no es determinately determinately verdadera.

$Q \leftrightarrow \neg D('Q')$ Yo no tengo el valor determinado

1.- Sup $D('Q')$ vale 0. 2.- $\neg D('Q')$ vale 1 (neg)

3.- Q vale 1 4.- $D('Q')$ vale 1 (cláusula b)

5.- Absurdo 6.- $D('Q')$ no vale 0. 7.- $Q \not\leq \neg('Q')$ (cláusula d)

8.- $Q \not\leq \neg\neg D('Q')$ (cláusula d) 9.- $Q \not\leq D('Q')$ (doble negación)

10.- $DQ \not\leq Q$ (cláusula c)

11.- $DQ < Q$ (la aplicación de D disminuye el valor de Q sin llegarlo a 0.

12.- $DQ \not\leq \neg D('Q')$ (cláusula c)

13.- DDQ vale 0 (cláusula d)

El problema se resuelve porque DQ le baja el valor a Q y DDQ directamente da 0-

Enfrentando las venganzas

Mentiroso transfinito

$Q \leftrightarrow \neg D^{\alpha}\,('Q')$ Yo no tengo el valor determinado α veces.

1.- Sup $D^{\alpha}(Q)$ vale 0.

2.- $\neg D^{\alpha}('Q')$ vale 1 (neg)

3.- Q vale 1

4.- $D('Q')$ vale 1, DD(Q) también vale 1, DDD alfa veces también vale 1.

5.- Absurdo

6.- $D^{\alpha}('Q')$ no vale 0.

7.- $D^{\alpha}Q \leqq Q)$ (cláusula c)

8.- $D^{\alpha}Q \leqq \neg D^{\alpha}('Q')$

9.-$D^{\alpha+1}Q$ vale 0 por (cláusula d)

$D^{\alpha+1}$ es más fuerte que que D^{α}

En resumen:para cualquier Q^{α} dado, la oración $D^{\alpha}Q$ se hace cada vez más fuerte a medida que la iteración se incrementa hasta llegar a α+1. En ese momento, no hay más reforzamiento al agregar D, porque la oración vale ya 0.

Un condicional Razonable?

- Las siguientes inferencias no son válidas en el enfoque de Field:

(a) $A \rightarrow (B \rightarrow C) \therefore B \rightarrow (A \rightarrow C)$

(b) $A \rightarrow (B \rightarrow C) \therefore (A \wedge B) \rightarrow C$

(c) $(A \wedge B) \rightarrow C \therefore A \rightarrow (B \rightarrow C)$

(d) $A \rightarrow (A \rightarrow C) \therefore A \rightarrow C$

Falla el teorema de la deducción: Si $\Gamma, A \models B$, entonces $\Gamma \models A \rightarrow B$ (donde $\models$ indica la relación de consecuencia lógica de acuerdo a la semántica de Field).

Gracias